Exercice 1

1)

	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	2
2	1	2	1

$T_0 = 1$, $T_1 = 1+1+1+1 = 4$ et $T_2 = 1+1+1+1+1+2+1+2+1 = 11$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour le calcul de T_n on effectue un regroupement de termes en découpant le rectangle en le triangle supérieur, le triangle inférieur puis on retire la diagonale comptée deux fois.

$$T_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} + \sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\binom{j}{i} - \sum_{i=0}^{n}\binom{i}{i}.$$

En échangeant les rôles de i et j on constate que les deux sommes triangulaires sont égales,

$$\begin{aligned} T_n &= 2\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{j}{i}\right) - (n+1) \\ &= 2\sum_{j=0}^{n}2^j - (n+1) \\ &= 2\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) - (n+1) \\ &\boxed{T_n = 2^{n+2} - n - 3}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Questions indépendantes

1) Soit x au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{\sqrt{x^3+1}}}{(\sqrt{x^3+1})^4}\frac{\sqrt{x^3+1})^4}{x^5+x^2+3} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x^3+1}}}{(\sqrt{x^3+1})^4}\frac{(x^3+1)^2}{x^5+x^2+3} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x^3+1}}}{(\sqrt{x^3+1})^4}\frac{x^6(1+\frac{1}{x^3})^2}{x^5(1+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5})} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x^3+1}}}{(\sqrt{x^3+1})^4}\frac{x(1+\frac{1}{x^3})^2}{1+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}} \end{aligned}$$

Puis $\sqrt{x^3+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{e^u}{u^4} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées, donc $\dfrac{e^{\sqrt{x^3+1}}}{(\sqrt{x^3+1})^4} \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par opérations sur les limites, $\dfrac{x(1+\frac{1}{x^3})^2}{1+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Finalement, par produit $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2) **Limite en** 0. Pour x au voisinage de 0 différent de 0,

$$f(x) = \frac{\ln(1+2x^3)}{2x^3}\frac{2x^3}{3x^2+4x} = \frac{\ln(1+2x^3)}{2x^3}\frac{2x^2}{3x+4}.$$

Or $2x^3 \underset{x\to0}{\longrightarrow}$ et $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \underset{u\to0}{\longrightarrow} 1$ donc par composition $\dfrac{\ln(1+2x^3)}{2x^3} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$. Puis par opérations $\dfrac{2x^2}{3x+4} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.

Finalement par produit $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$.

Limite en $+\infty$. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x^3) + \ln(\frac{1}{x^3} + 2)}{3x^2 + 4x} \\ &= 3\frac{\ln x}{x^2}\frac{1}{3 + \frac{4}{x}} + \frac{\ln(\frac{1}{x^3} + 2)}{3x^2 + 4x}. \end{aligned}$$

Par croissances comparées $\dfrac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par opérations $\frac{\ln(\frac{1}{x^3}+2)}{3x^2+4x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par produit, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

3) Soit $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$,

$$f(x) = \frac{e^{b^x \ln a}}{e^{a^x \ln b}} = e^{b^x \ln a - a^x \ln b}.$$

Or

$$b^x \ln a - a^x \ln b = b^x \left(\ln a - \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln b\right).$$

Or $1 < a < b$ donc $0 < \frac{a}{b} < 1$, donc $\ln \frac{a}{b} < 0$ car $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = e^{x \ln \frac{a}{b}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc par opérations

$$\ln a - \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln b \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln a.$$

Enfin $b^x = e^{x \ln b} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\ln b > 0$.

Finalement, par opérations $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

Exercice 3

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 3\theta = 2\theta \ [2\pi] \text{ ou } 3\theta = -2\theta \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta = 0 \ [2\pi] \text{ ou } \theta = 0 \ \left[\frac{2\pi}{5}\right] \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \left\{\dfrac{2k\pi}{5} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

(Notons que cet ensemble contient nécessaire l'autre groupe de solutions $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$).

2) Soit θ réel.

-a- Formule connue : $\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1}$.

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}.$$

-b- Méthode à l'aide des complexes:

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{2i\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2\right) \qquad \text{(Formule de Moivre)} \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^2\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta\right) \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1}$$

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{3i\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3\right) \qquad \text{(Formule de Moivre)} \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^3\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\right) \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\
&\Leftrightarrow 4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0 \quad \text{où } X = \cos\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow P(X) = 0 \quad \text{où } P = 4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 \text{ et } X = \cos\theta}$$

4) Puis, on remarque que $P(1) = 0$ donc P est factorisable par $X-1$. On obtient $P(X) = (X-1)(4X^2+2X-1)$ (que l'on peut obtenir par identification par exemple)

$$\begin{aligned}
P(X) = 0 &\Leftrightarrow (X-1)(4X^2+2X-1) \\
&\Leftrightarrow X = 1 \quad \text{ou} \quad 4X^2 + 2X - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow X = 1 \quad \text{ou} \quad X = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} \quad \text{ou} \quad X = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } P(X) = 0, \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}}$.

5) D'après 3) et 4), il vient:

$$(E) \Leftrightarrow \cos\theta \in \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}.$$

D'après 1), on déduit donc que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \in \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}$.

En particulier pour $k = 1$, $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ (car $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on exclut donc 1 et la valeur négative).

Pour $k = 2$, $\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$ (car $\frac{4\pi}{5} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, on exclut donc 1 et la valeur positive).

Pour le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \qquad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$

NB: on peut aussi utiliser une formule de duplication:

$$\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

Puis comme $\frac{\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ d'où: $\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}$.

On peut encore simplifier:

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$