Exercice 1

1) -a- On pose $p = 2n - k$, dans Q_n,

$$Q_n = \prod_{p=2n-1}^{n+1} \sin\left(\frac{(2n-p)\pi}{2n}\right) = \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{p\pi}{2n}\right).$$

Or $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$, donc finalement $\boxed{Q_n = \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}$.

-b-

$$R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}_{=Q_n} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right)}_{k=n} \underbrace{\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}_{=Q_n \text{ d'après 1)-a-}}$$

Comme $\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, alors $\boxed{R_n = Q_n^2}$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$(E) \Leftrightarrow (z+1)^{2n} = 1 \Leftrightarrow z+1 \in \mathbb{U}_{2n} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \ / \ z = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{2n}} - 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \ / \ z = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{2n}} \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{2n}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \ / \ z = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{2n}} \times 2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z = 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{2n} + \frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}}.$$

Comme $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, alors $\dfrac{k\pi}{2n} \in [0, \pi]$ donc $\sin\dfrac{k\pi}{2n} \geqslant 0$, l'expression ci-dessous est donc la forme trigonométrique et

$\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \left\{2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)} \ / \ k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\}}$.

3) On note $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.

$$P_n = \prod_{k=1}^{2n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)} = \prod_{k=1}^{2n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \prod_{k=1}^{2n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)} = 2^{2n-1} \times R_n \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)} \qquad (*)$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2n} \frac{(2n-1)2n}{2} + (2n-1)\frac{\pi}{2} = (2n-1)\frac{\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi}{2} = 2n\pi - \pi$$

donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n\pi - \pi)} = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,n\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi} = -1.$$

En remplaçant dans $(*)$, on obtient, $\boxed{R_n = -\dfrac{P_n}{2^{2n-1}}}$.

4) On admet que $P_n = -2n$. On déduit de 3) que $R_n = \dfrac{2n}{2^{2n-1}} = \dfrac{n}{2^{2n-2}}$. Et comme d'après 1)-b-, $R_n = Q_n^2$ alors $Q_n = \pm\sqrt{R_n}$. Or Q_n est le produit de $\sin\frac{k\pi}{2n}$ tous positifs car $\frac{k\pi}{2n} \in [0, \pi]$ lorsque $k \in [\![1, n-1$, donc $Q_n \geqslant 0$ et donc

$$Q_n = \sqrt{R_n} = \sqrt{\frac{n}{2^{2n-2}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}. \qquad \boxed{Q_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}}.$$

5) Les z_k pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ sont les racines du polynôme $(z+1)^{2n} - 1$.

Donc d'une part $(z+1)^{2n} - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1} (z - z_k)$. D'autre part, d'après la formule du binôme,

$$(z+1)^{2n} - 1 = \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k 1^{2n-k}\right) - 1 = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} z^k 1^{2n-k}.$$

Comme $z_0 = 0$, on peut donc simplifier par z pour $z \neq 0$,

$$\prod_{k=1}^{2n-1} (z - z_k) = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} z^{k-1}.$$

On identifie le coefficient constant de chacune de ces expressions, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} (-z_k) = \binom{2n}{1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (-1)^{2n-1} P_n = 2n \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{P_n = -2n}.$$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) -a- Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$S_3(z) = 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 - \mathrm{i} = 0 \ \ (E).$$

Le discriminant de (E) est $\Delta = 1 - 4(1-\mathrm{i}) = -3 + 4\,\mathrm{i}$. On a $|\Delta| = 5$. Soit $\delta = x + \mathrm{i}\,y$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\delta^2 = -3 + 4\,\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & L_1 \\ 2xy = 4 & L_2 \\ x^2 + y^2 = 5 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ xy = 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ xy > 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

D'où $\Delta = (1 + 2\,\mathrm{i})^2$. D'où les solutions de (E): $\dfrac{-1-(1+2\,\mathrm{i})}{2} = -1 - \mathrm{i}$, $\dfrac{-1+(1+2\,\mathrm{i})}{2} = \mathrm{i}$.

D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de l'équation } S_3(z) = 1\text{:} \quad \{\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}\}}$.

-b- Notons F l'ensemble cherché. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in F \Leftrightarrow S_3(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + z + z^2 = \overline{1 + z + z^2} \Leftrightarrow 1 + z + z^2 = 1 + \overline{z} + \overline{z}^2 \Leftrightarrow z - \overline{z} + z^2 - \overline{z}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \overline{z})(1 + z + \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \overline{z} \\ \textbf{ou} \\ z + \overline{z} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ \textbf{ou} \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Donc $\boxed{F = \mathbb{R} \cup \left\{-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,y \,/\, y \in \mathbb{R}\right\}}$.

2) On reconnait la somme des termes d'une suite géormétrique de raison z de premier terme 1:

$$\boxed{S_n(1) = n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ S_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}}.$$

3) et 4) Soit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}$ et $n \geqslant 2$,

$$S_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}}{1 - z} = \frac{2}{1 - z} = \frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}}\right)} = \frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}}}{-2\,\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Or $\dfrac{\pi}{2n} \in [0, \pi]$ donc $\sin\frac{\pi}{2n} > 0$ d'où $\boxed{|S_n(z)| = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}}$. Puis $\boxed{\mathrm{Arg}(S_n(z)) = -\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]}$

5) -a- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons (E') l'équation $\cos(n\theta) = \cos\theta$.

$$(E') \Leftrightarrow \begin{cases} n\theta = \theta\ \ [2\pi] \\ \textbf{ou} \\ n\theta = -\theta\ \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-1)\theta = 0\ \ [2\pi] \\ \textbf{ou} \\ (n+1)\theta = 0\ \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 0\ \ [\frac{2\pi}{n-1}] \\ \textbf{ou} \\ \theta = 0\ \ [\frac{2\pi}{n+1}] \end{cases}$$

D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E') \text{ est } \left\{\dfrac{2k\pi}{n-1} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2k\pi}{n+1} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

-b- Soit $\boxed{z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}}$.

$$\begin{aligned} z \in \Gamma &\Leftrightarrow |S_n(z)| = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{|1 - z^n|}{|1 - z|} = 1 \\ &\Leftrightarrow |1 - z^n|^2 = |1 - z|^2 \\ &\Leftrightarrow (1 - z^n)\overline{(1 - z^n)} = (1 - z)\overline{(1 - z)} \\ &\Leftrightarrow (1 - z^n)(1 - \overline{z}^n) = (1 - z)(1 - \overline{z}) \Leftrightarrow 1 - z^n - \overline{z}^n + \underbrace{|z^n|^2}_{=|z|^{2n}=1} = 1 - z - \overline{z} + \underbrace{|z|^2}_{=1} \end{aligned}$$

$\boxed{z \in \Gamma \Leftrightarrow z^n + \overline{z}^n = z + \overline{z}}$.

-c- Soit $\boxed{z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}}$, posons donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, d'après 5)-b- et les formules d'Euler,

$$\begin{aligned} z \in \Gamma &\Leftrightarrow 2\cos(n\theta) = 2\cos\theta \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, \theta = \frac{2k\pi}{n-1} \quad \textbf{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, \theta = \frac{2k\pi}{n+1} \quad \text{(d'après 5)-a-)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, z = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n-1}} \quad \textbf{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, z = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n+1}} \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}. \end{aligned}$$

Notons enfin que pour $z = 1$, $S_n(1) = n$ et donc $1 \notin \Gamma$. Finalement, $\boxed{\Gamma = \mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}}$.