Pendant les vacances :
1) se reposer, faire des activités qui vous ont manqué pendant les sept premières semaines de cours
2) revoir le cours
3) reprendre votre copie de DS2,
4) un calcul par jour; vous pouvez aussi pour faire davantage d'entrainement aux calculs reprendre les exercices déjà faits TD (toujours sans lire le corrigé)
5) passer du temps sur ce DM5
6) terminer la fiche équations différentielles en commençant par les exercices ♡

Exercice 1 On pose $f : x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\tan x}$.

1) -a- Déterminer le domaine de définition de f et étudier la parité de f.
   -b- Étudier la limite de f en 0 et en $\frac{\pi}{2}$
   -c- Avec les limites obtenues à la question précédente, on prolonge f par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. On continuera à noter f la fonction ainsi prolongée.
   Étudier la dérivabilité de f en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.
   -d- Montrer que f est dérivable sur $D = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et que :
$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 + \cos x - 1)}{\sin^2 x}.$$
   -e- Montrer qu'il existe une fonction $\widetilde{f}$ dérivable sur $]-\pi, \pi[$ telle que la restriction de $\widetilde{f}$ à D soit f.

2) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable de $t = \cos x$.

3) On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y'(x) + \dfrac{2}{\sin(2x)} y(x) = -\cos x \quad$ où $\quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   -a- Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{\sin(2x)}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   On pourra utiliser le changement de variable $s = \tan t$ pour le calcul de $\displaystyle\int^x \frac{2}{\sin(2t)}\,\mathrm{d}t$.
   -b- En déduire la résolution de l'équation homogène associée (E) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   -c- Montrer que f est solution particulière de (E).
   -d- Par une autre méthode déterminer une solution particulière de (E).
   -e- En déduire la résolution de (E) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   -f- **Bonus** Résoudre l'équation différentielle sur $]-\pi, \pi[$: $\sin(2x)y'(x) + 2y(x) = -\cos x \sin(2x)$.
   Indication Les calculs seront plus simples si vous utilisez f comme solution particulière de (E) plutôt que la solution obtenue au 3.d.

Exercice 2. Facultatif
Le but de cete exercice est de résoudre l'équation fonctionnelle :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x) \quad (E).$$
où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
1) Soit f solution du problème.
   -a- Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.
   -b- Démontrer que f est impaire.
   -c- Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xf' - f = kx$ où $k = f'(1)$.
   -d- En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en fonction de k; puis son expression sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer alors l'ensemble-solution de (E).
   On aura remarqué que dans la question 1), on raisonne par implication. Il reste alors à vérifier.