Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1 L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos x \quad (E).$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1): $y'' - y = x$.

2) Résoudre l'équation différentielle (E_2): $y'' + y = \cos x$.
Pour la résolution de (E), on raisonne par analyse-synthèse.

3) **Analyse.** Soit f une solution de (E). On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

-a- Établir que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_2).
En déduire la forme de l'expression de g.

-b- Établir que la fonction h est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_1).
En déduire la forme de l'expression de h.

-c- Après avoir exprimé f à l'aide de g et h, déterminer la forme de l'expression de f.

4) **Synthèse, puis conclusion**. Déterminer alors l'ensemble des fonctions vérifiant (E).

Exercice 2. Théorème de Cesaro et applications

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes. Le but des questions 1) et 2) est de prouver le **théorème de Cesaro** qui affirme que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l.
Dans un premier temps, si cela vous semble compliqué vous pouvez admettre le résultat de la première question et continuer la suite.

1) On suppose d'abord $l = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

-a- Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_0$ on a $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

-b- Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_1$ on a: $\dfrac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

-c- Déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Traiter le cas $l \in \mathbb{R}$ en utilisant ce qui précède. [Il pourra être judicieux d'étudier $a_n - l$]

Dans la suite on donne quelques applications du théorème de Cesaro.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la suite $(v_{n+1} - v_n)_n$ converge vers l. Montrer que la suite $\left(\dfrac{v_n}{n}\right)_n$ converge également vers l.

4) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)_n$ converge vers l où $l > 0$. Montrer que $\left(\sqrt[n]{w_n}\right)_n$ converge également vers l. *On admet que résultat reste vrai si* $l = 0$.

5) **Application**: déterminer les limites éventuelles des suites de terme général:

-a- $u_n = \sqrt[n]{n}$

-b- $u_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$

-c- $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.