MPSI/MP2I – Devoir Surveillé n° 2

Samedi 12 Octobre 2024

Durée : 3 heures

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

— chaque variable utilisée dans une démonstration doit être introduite ;
— chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours, avec ses hypothèses exactes, ou en citant le numéro d'une question précédente du problème ;
— toute question amène une réponse dont la conclusion doit être encadrée ;
— les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français ;
— les notations de l'énoncé doivent être respectées ;
— les copies doivent être numérotées ;
— on peut choisir l'ordre des exercices, mais on respectera l'ordre des questions ;
— on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, les résultats qu'on admet.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{E}_a$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = a$.

1) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \dfrac{|z|^2-1}{|z+1|^2}$.
2) En déduire que : $M \in \mathcal{E}_a \Leftrightarrow (1-a)|z|^2 - 2a\operatorname{Re}(z) = a+1$.
3) Déterminer $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, en précisant leur nature géométrique.
4) On suppose désormais que $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Décrire géométriquement l'ensemble $\mathcal{E}_a$, en fonction de a.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. L'objectif de cet exercice est de calculer la somme :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)^n.$$

Dans ce but, nous considérons pour $p \in [\![0, n]\!]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ les sommes :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \mathrm{e}^{ik\theta}\right)^n \qquad \text{et} \qquad T_{n,p}(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ikp\theta}.$$

1) Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Justifier que : $T_{n,p}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \begin{cases} n & \text{si } p \in \{0, n\} \\ 0 & \text{si } p \in [\![1, n-1]\!] \end{cases}$.
2) -a- Montrer que $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} T_{n,p}(\theta)$.

   -b- Conclure que $S_n(\frac{2\pi}{n}) = 2n$.
3) -a- Démontrer que : $\forall\ k \in [\![0, n-1]\!],\ 1 + \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}$.

   -b- En utilisant la question 2.b), en déduire finalement la valeur de C_n.

Exercice 3

Considérons l'équation $(\star)$ suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1+iz)^5 = (1-iz)^5. \qquad (\star)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on notera $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1) **Résolution trigonométrique de $(\star)$.**
   À l'aide des racines cinquièmes de l'unité, montrer que les solutions de $(\star)$ sont les nombres :

$$z_k = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right), \text{ où } k \in [\![0, 4]\!].$$

2) **Résolution algébrique de ($\star$)**

-a- Soit $z \in \mathbb{C}$. Développer $(1+iz)^5$ et $(1-iz)^5$, puis montrer que :

$$z \text{ est solution de } (\star) \iff \big(z = 0 \text{ ou } z^4 - 10z^2 + 5 = 0\big).$$

-b- En déduire les expressions explicites des solutions de ($\star$).

3) **Conclusion**

-a- Étudier les variations de la fonction tan sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

-b- Conclure que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Exercice 4

Dans tout l'exercice, α désigne un paramètre réel non nul et on considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \exp\left(-x^\alpha\right).$$

1) *Quelques limites.* Soit β un réel non nul.

-a- Déterminer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\beta f(x)$ dans les quatre cas :

$$\begin{array}{ll} \alpha < 0 \text{ et } \beta < 0, & \alpha < 0 \text{ et } \beta > 0, \\ \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0, & \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0. \end{array}$$

-b- En déduire, par changement de variable, la limite $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta f(x)$ dans ces quatre mêmes cas.

Dans toute la suite, on supposera que $\alpha \in \,]e, +\infty[$.

2) *Point fixe de f.* Notons g la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

-a- Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle à déterminer.

-b- En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera désormais r_α, et que celle-ci vérifie l'encadrement suivant :

$$\alpha^{-\frac{1}{\alpha}} < r_\alpha < 1.$$

-c- Montrer l'existence des limites $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} r_\alpha$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (r_\alpha - 1)\sqrt{\alpha}$ et donner leurs valeurs.

-d- Rappeler la définition précise de « fonction strictement croissante » puis démontrer que la fonction $\alpha \mapsto r_\alpha$ est strictement croissante sur $]e, +\infty[$.

3) *Points fixes de la composée $f \circ f$.* On considère l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid f(f(x)) = x\}$ des points fixes de $f \circ f$. Montrer que S est non vide, inclus dans $]0, 1[$, et qu'il vérifie :

$$\forall x \in \,]0, 1[\,, \quad x \in S \iff \alpha x^\alpha + \ln(-\ln x) = 0.$$

4) On considère les fonctions h, k définies sur $]0, 1[$ par :

$$\forall x \in \,]0, 1[\,, \quad h(x) = \alpha x^\alpha + \ln(-\ln x) \quad \text{et} \quad k(x) = \alpha^2 x^\alpha \ln x + 1.$$

-a- Montrer que $k(r_\alpha) < 0$ en utilisant 1.b) et dresser le tableau de variation de la fonction k.

-b- En étudiant h, en déduire qu'il existe deux éléments s_α, t_α de $]0, 1[$ tels que :

$$S = \{r_\alpha,\ s_\alpha,\ t_\alpha\} \quad \text{et} \quad s_\alpha < r_\alpha < t_\alpha.$$

5) *Cette question est indépendante des précédentes et plus difficile.*
Déterminer toutes les fonctions $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad u\left((x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = u(x)\,u(y).$$