MPSI/MP2I – Devoir Surveillé 1

Samedi 21 septembre 2024

Corrigé

Exercice 1

1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{|z+1|^2} = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{z\overline{z}-\overline{z}+z-1}{|z+1|^2} = \frac{|z|^2+2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)-1}{|z+1|^2}.$$

Donc $\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{|z|^2-1}{|z+1|^2}}$.

2) On en déduit,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E}_a &\Leftrightarrow \frac{|z|^2-1}{|z+1|^2} = a \\ &\Leftrightarrow |z|^2-1 = a|z+1|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2-1 = a(z+1)(\overline{z}+1) \\ &\Leftrightarrow |z|^2-1 = a(|z|^2+z+\overline{z}+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{M \in \mathcal{E}_a \Leftrightarrow (1-a)|z|^2 - 2a\mathrm{Re}(z) = a+1}.$$

3)

$$M \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow -2\mathrm{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = -1.$$

Donc $\boxed{\mathcal{E}_1 \text{ est la droite d'équation } x=-1 \text{ privé du point d'affixe } -1}$.

On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E}_2 &\Leftrightarrow -|z^2| - 4\mathrm{Re}(z) = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+4x = -3 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2 = 1. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est le cercle de centre d'affixe } -2 \text{ et de rayon } 1 \text{ privé du point d'affixe } -1}$.

4) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E}_a &\Leftrightarrow (1-a)|z|^2 - 2a\mathrm{Re}(z) = a+1 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{2a}{1-a}x = \frac{a+1}{1-a} \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{1-a}\right)^2 + y^2 = \frac{a+1}{1-a} + \frac{a^2}{(1-a)^2} \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{1-a}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(a-1)^2}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{E}_a \text{ est le cercle de centre d'affixe } \frac{a}{1-a} \text{ et de rayon } \frac{1}{|a-1|} \text{ privé du point d'affixe } -1}$.

Exercice 2

1) Soit $p \in [\![0,n]\!]$. On calcule

$$T_{n,p}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2ikp\pi}{n}}.$$

Reconnaissant une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{\frac{2ip\pi}{n}}$, on distingue deux cas selon la raison valant 1 ou non.

* **Premier cas :** $p \in \{0, n\}$.

  Remarquons qu'alors $\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}} = 1$, et donc $T_{n,p}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$.

* **Deuxième cas :** $p \in [\![1, n-1]\!]$.

  Ici, $\dfrac{2p\pi}{n} \in]0, 2\pi[$ donc $\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}} \neq 1$. D'après la formule de Moivre, on a :

$$T_{n,p}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}} = \frac{1-\mathrm{e}^{i2p\pi}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}} = 0,$$

  car $\mathrm{e}^{i2p\pi} = 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad T_{n,p}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \begin{cases} n & \text{si } p \in \{0, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

2) -a- Calculons

$$\begin{aligned}
S_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\mathrm{e}^{ik\theta}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right)^p \quad \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\mathrm{e}^{ikp\theta} \quad \text{(d'après la formule de Moivre)} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{ikp\theta} \quad \text{(en permutant les deux sommes)}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}T_{n,p}(\theta)}$.

-b- Sortons le premier et le dernier terme (correspondant à $p = 0$ et $p = n$ de la somme ci-dessus) :

$$S_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \binom{n}{0}T_{n,0}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sum_{p=1}^{n-1}\binom{n}{p}T_{n,p}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \binom{n}{n}T_{n,n}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1\times n + \sum_{p=1}^{n-1}\left[\binom{n}{p}\times 0\right] + 1\times n$$

en utilisant la question 1). Ainsi :

$$\boxed{S_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2n}.$$

3) -a- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Via la méthode de l'angle moitié, nous obtenons :

$$1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$$

et donc, d'après la formule d'Euler (pour le cosinus),

$$\boxed{1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}.$$

-b- D'une part, nous savons que $S_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2n$ d'après la question 2)-b-. D'autre part, par définition de S_n et d'après la question 3)-a-, nous avons :

$$S_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right]^n = 2^n\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)^n\left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^k = 2^n\times C_n$$

puisque $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$. Finalement, $2n = 2^nC_n$, i.e. :

$$\boxed{C_n = \frac{n}{2^{n-1}}}.$$

Exercice 3

1) Remarquons tout d'abord que i n'est pas solutions de l'équation : nous pourrons donc supposer dans la suite que $z \neq i$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = 1 \\
&\iff \exists\, k \in [\![0,4]\!] \ / \ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\
&\iff \exists\, k \in [\![0,4]\!] \ / \ 1+iz = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-iz) \\
&\iff \exists\, k \in [\![0,4]\!] \ / \ i\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) z = e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1 \\
&\iff \exists\, k \in [\![0,4]\!] \ / \ z = \frac{1}{i}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}}-1}{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}} \quad \left(\text{on a bien } 1+e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq 0\right) \\
&\iff \exists\, k \in [\![0,4]\!] \ / \ z = -i\frac{e^{\frac{ik\pi}{5}}\left(e^{\frac{ik\pi}{5}} - e^{-\frac{ik\pi}{5}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{5}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{5}} + e^{\frac{ik\pi}{5}}\right)} \\
&\iff \exists\, k \in [\![0,4]\!] \ / \ z = -i\frac{2i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \\
&\iff \exists\, k \in [\![0,4]\!] \ / \ z = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right).
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(\star)$ est $\boxed{S = \left\{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right),\ k \in [\![0,4]\!]\right\}}$.

2) -a- Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (\star) &\iff (1+iz)^5 = (1-iz)^5 \\
&\iff \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(iz)^k = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-iz)^k \\
&\iff 1+5iz-10z^2-10iz^3+5z^4+iz^5 = 1-5iz-10z^2+10iz^3+5z^4-iz^5 \\
&\iff 2iz^5-20iz^3+10iz = 0 \\
&\iff 2iz\left(z^4-10z^2+5\right) = 0
\end{aligned}$$

Un produit de complexes étant nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, nous pouvons conclure :

$$\boxed{z \text{ est solution de } (\star) \iff \left(z = 0 \text{ ou } z^4-10z^2+5=0\right)}.$$

-b- Le discriminant de l'équation du second degré $Z^2-10Z+5=0$ vaut $80 = 4^2 \times 5$. Les solutions de cette équation sont donc :

$$\frac{10-\sqrt{80}}{2} = 5-2\sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad \frac{10+\sqrt{80}}{2} = 5+2\sqrt{5}$$

Les deux racines obtenues sont positives (puisque $20 = (2\sqrt{5})^2 \leqslant 25$) donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (\star) &\iff z=0 \quad \text{ou} \quad z^2 = 5-2\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad z^2 = 5+2\sqrt{5} \\
&\iff z=0 \quad \text{ou} \quad z = \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad z = \pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (\star) \text{ est } \left\{0, -\sqrt{5+2\sqrt{5}}, -\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}}$.

3) -a- La fonction tangente est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables (les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$), dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan'(x) = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} > 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction tan est strictement croissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan$	$0 \nearrow$	$+\infty$ ||

-b- D'après les questions 1) et 2), l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

$$\left\{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right),\ k \in [\![0,4]\!]\right\} = \left\{0, -\sqrt{5+2\sqrt{5}}, -\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}.$$

En particulier, les nombres $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, qui sont solutions de $(\star)$, appartiennent au second ensemble.
Or $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc (par croissance stricte de la fonction tangente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$) :

$$0 < \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Comme :

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

on obtient, par élimination,

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}.$$

Exercice 4

0) -a- Lorsque $\alpha < 0$, on sait que $x^\alpha \to 0$ en $+\infty$, donc $f(x) \to 1$ par continuité de l'exponentielle et composition.
Par conséquent, $x^\beta f(x)$ admet la même limite que x^β.
Supposons maintenant que $\alpha > 0$, de sorte que $f(x) \to 0$ par limite de l'exponentielle en $-\infty$.
Le cas $\beta < 0$ ne présente pas d'indétermination car $x^\beta \to 0$ aussi. Dans le cas $\beta > 0$ on recourt aux croissances comparées :

$$X^{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0, \qquad \text{où l'on pose } X = x^\alpha.$$

En définitive, on obtient les limites suivantes en $+\infty$:

(lim en $+\infty$**)**	$\beta < 0$	$\beta > 0$
$\alpha < 0$	0	$+\infty$
$\alpha > 0$	0	0

-b- Le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ se traduit par $x^\alpha = X^{-\alpha}$ et $x^\beta = X^{-\beta}$.
Comme $\frac{1}{x} \to +\infty$ en 0, il suffit donc d'inverser les signes de α et β par rapport au tableau ci-dessus :

(lim en 0**)**	$\beta > 0$	$\beta < 0$
$\alpha > 0$	0	$+\infty$
$\alpha < 0$	0	0

1) -a- La fonction g est bien définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle est continue par quotient et composition de fonctions continues. De plus, $x \mapsto x\exp(x^\alpha)$ est un produit de deux fonctions strictement croissantes et *strictement positives*, donc elle est strictement croissante aussi. Par passage à l'inverse, g est strictement décroissante.
Les limites de g en 0 et $+\infty$ sont données par le cas $\alpha > 0$ et $\beta = -1$ des questions 0)-a- et 0)-b-. Par théorème de bijection monotone,

$$\boxed{g \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } g(\mathbb{R}_+^*) =]0, +\infty[\,.}$$

-b- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $f(x) = x \iff g(x) = 1$. Comme $1 \in \mathbb{R}_+^*$ et g est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, le réel 1 admet un unique antécédent $r_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ par g.

Rappelons que $g(r_\alpha) = 1$. La valeur $g(1) = \exp(-1)$ donne $g(1) < g(r_\alpha)$. Par stricte décroissance de la réciproque g^{-1}, il vient $\boxed{1 > r_\alpha}$.

De même, $g(\alpha^{-1/\alpha}) = (\alpha/e)^{1/\alpha} > 1 = g(r_\alpha)$ car $\alpha > e$, donc $\boxed{\alpha^{-1/\alpha} < r_\alpha}$.

-c- On sait que $\frac{\ln\alpha}{\alpha} \to 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Donc, par continuité de l'exponentielle et composition de limites,

$$\alpha^{-1/\alpha} = \exp(-\tfrac{\ln\alpha}{\alpha}) \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} \exp(0) = 1.$$

Par théorème d'encadrement, on a donc existence de la limite : $\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty} r_\alpha = 1.}$

Pour la deuxième limite, on utilise l'encadrement $(\alpha^{-1/\alpha} - 1)\sqrt{\alpha} \leqslant (r_\alpha - 1)\sqrt{\alpha} \leqslant 0$, qui se déduit du précédent.

- *Méthode 1.* On fait apparaître la limite usuelle $\frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} \underset{u\to0}{\longrightarrow} 1$ avec $u = -\frac{\ln\alpha}{\alpha}$,

$$(\alpha^{-1/\alpha} - 1)\sqrt{\alpha} = \left(e^{-\frac{\ln\alpha}{\alpha}} - 1\right)\sqrt{\alpha} = \frac{\left(e^{-\frac{\ln\alpha}{\alpha}} - 1\right)}{-\frac{\ln\alpha}{\alpha}} \times \left(-\frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

  On compose alors les limites usuelles $\frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} \underset{u\to0}{\longrightarrow} 1$ et $-\frac{\ln\alpha}{\alpha} \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ que l'on multiplie par la limite de croissances comparées $-\frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}} \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour obtenir $(\alpha^{-1/\alpha} - 1)\sqrt{\alpha} \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- *Méthode 2.* L'équivalent usuel $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ donne, en composant la limite avec $u = -\frac{\ln\alpha}{\alpha}$, l'équivalent suivant :

$$(\alpha^{-1/\alpha} - 1)\sqrt{\alpha} = \left(e^{-\frac{\ln\alpha}{\alpha}} - 1\right)\sqrt{\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\ln\alpha\sqrt{\alpha}}{\alpha} = -\frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}}.$$

  On obtient donc $(\alpha^{-1/\alpha} - 1)\sqrt{\alpha} \to 0$ car $\ln\alpha = o(\alpha^{1/2})$ en $+\infty$.

On conclut à l'existence de la limite par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}(r_\alpha - 1)\sqrt{\alpha} = 0.}$

-d- Dire que $\alpha \mapsto r_\alpha$ est strictement croissante signifie que :

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta) \in \,]e,+\infty[^2, \quad (\alpha < \beta \implies r_\alpha < r_\beta).}$$

Soit $(\alpha,\beta) \in \,]e,+\infty[^2$. Supposons que $\alpha < \beta$. Alors : $\forall x \in \,]0,1[\,,\ x^\alpha > x^\beta$ et $\exp(-x^\alpha) < \exp(-x^\beta)$.
En prenant $x = r_\beta$, il vient donc $\exp(-{r_\beta}^\alpha) < r_\beta$; c'est-à-dire que $g(r_\beta) < 1$ où $g : x \mapsto \frac{1}{x}\exp(-x^\alpha)$.
Or $g(r_\alpha) = 1$, donc $r_\beta > r_\alpha$ par stricte décroissance de g^{-1}.

2) De $f(r_\alpha) = r_\alpha$ on déduit $f(f(r_\alpha)) = f(r_\alpha) = r_\alpha$, donc $r_\alpha \in S$. Par conséquent $S \neq \emptyset$.
Montrons l'inclusion. Soit $x \in S$. Alors $x = \exp(-f(x)^\alpha)$, donc $0 < x < e^0$ car $t \mapsto \exp(-t)$ est strictement décroissante et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $S \subset \,]0,1[$.

Finalement, soit $x \in \,]0,1[$. Sachant que $-\ln x > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x \in S &\iff x = \exp(-(e^{-x^\alpha})^\alpha) \\ &\iff -\ln x = (e^{-x^\alpha})^\alpha \\ &\iff \ln(-\ln x) = -\alpha x^\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{x \in S \iff \alpha x^\alpha + \ln(-\ln x) = 0}.$$

3) -a- On sait que $r_\alpha = \exp(-(r_\alpha)^\alpha)$ donc $\ln r_\alpha = -(r_\alpha)^\alpha$. Par conséquent $k(r_\alpha) = 1 - [\alpha(r_\alpha)^\alpha]^2$. Mais par ailleurs $r_\alpha > \alpha^{-1/\alpha}$ d'après 1.b) donc $\alpha(r_\alpha)^\alpha > 1$, ce qui donne bien $\boxed{k(r_\alpha) < 0.}$

Limites : $\lim_{x\to0} k(x) = 1$ par croissances comparées, tandis que $\lim_{x\to1} k(x) = 1$ par continuité.
La fonction k est dérivable sur $]0,1[$ par opérations sur des fonctions qui le sont. Soit $x \in \,]0,1[$,

$$k'(x) = \alpha^3 x^{\alpha-1}\ln x + \alpha^2 x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha^2 x^{\alpha-1}(\alpha\ln x + 1).$$

L'étude de signe est directe et conduit au tableau de variations :

x	0		$e^{-1/\alpha}$		1
signe de $k'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de k	1	$\searrow$	$k(e^{-1/\alpha})$	$\nearrow$	1

-b- D'après les limites de ln en 0 et $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = -\infty$ car $\ln(1) = 0$.

La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ par opérations et composition de fonctions dérivables. Soit $x \in]0,1[$,

$$h'(x) = \frac{\alpha^2 x^\alpha \ln x + 1}{x \ln x} = \frac{k(x)}{x \ln x}.$$

Comme $x \ln x < 0$ sur cet intervalle, $h'(x)$ est de signe opposé à $k(x)$. On sait que $k(r_\alpha) < 0$, donc $k(e^{-1/\alpha}) < 0$ aussi (c'est le minimum). Par théorème de bijection monotone, la fonction continue k s'annule donc exactement une fois sur chaque intervalle de stricte monotonie $\left]0, e^{-1/\alpha}\right[$ et $\left]e^{-1/\alpha}, 1\right[$. Notons p_α et q_α les deux racines. Comme $k(r_\alpha) < 0$, elles vérifient $p_\alpha < r_\alpha < q_\alpha$. On en déduit finalement le tableau de variations :

x	0		p_α		q_α		1
signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de h	$+\infty$	$\searrow$	$h(p_\alpha)$	$\nearrow$	$h(q_\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Sachant que r_α est un point fixe, on a déjà $h(r_\alpha) = 0$. Or $p_\alpha < r_\alpha < q_\alpha$ donc $h(p_\alpha) < 0$ et $h(q_\alpha) > 0$ d'après les variations. Par théorème de bijection monotone, la fonction continue h s'annule donc exactement une fois sur chacun des trois intervalles de stricte monotonie, d'où la conclusion.

4) La fonction nulle et les fonctions de la forme $x \mapsto \exp(\lambda\, x^\alpha)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, sont clairement des solutions. On va montrer que ce sont les seules en raisonnant maintenant par conditions nécessaires.

Soit u une solution non nulle. Changeons de variable, en posant la fonction $v : t \longmapsto u(t^{1/\alpha})$. Cette fonction v reste dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition de fonctions dérivables, et elle vérifie la condition plus simple :

$$\forall s > 0, \forall t > 0, \quad v(s+t) = v(s)v(t).$$

À $s > 0$ fixé, la fonction $t \longmapsto v(s+t) - v(s)v(t)$ admet une dérivée nulle car elle est constante, d'où :

$$\forall s > 0, \forall t > 0, \quad v'(s+t) = v(s)v'(t), \qquad \text{mais aussi} \qquad \forall t > 0, \forall s > 0, \quad v'(t+s) = v(t)v'(s)$$

puisque les variables sont muettes. Par conséquent : $\forall s > 0, \forall t > 0, \quad v(s)v'(t) = v(t)v'(s)$.

On dispose d'un $s_0 > 0$ tel que $v(s_0) \neq 0$ car v n'est pas nulle. La relation précédente montre alors, en posant $\lambda = v'(s_0)/v(s_0)$, que v est solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t > 0, \quad v(t) = Ke^{\lambda t}.$$

En réinjectant dans la première condition, $Ke^{1+1} = (Ke^1)(Ke^1)$, d'où $K = K^2$. Or $K \neq 0$ car $v(s_0) \neq 0$, donc $K = 1$. On conclut en posant $t = x^\alpha$ pour inverser le changement de variable :

$$\forall x > 0, \quad u(x) = v(x^\alpha) = \exp(\lambda\, x^\alpha).$$