Exercice 1. (♡) Après avoir justifié leur existence, déterminer les primitives des fonctions suivantes

1) -a- $x \mapsto x^4 - 3x^2 + 3\sqrt{x} + x^{\frac{2}{3}}$
   -b- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x^3}$
   -c- $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

2) -a- $x \mapsto x\sqrt{3 + 2x^2}$
   -b- $x \mapsto \sin(2x)\sqrt{2 + \cos(2x)}$
   -c- $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(4 + \mathrm{e}^x)^3}$
   -a- $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$
   -b- $x \mapsto \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$
   -c- $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}}}$

3) -a- $x \mapsto \dfrac{x}{3x^2 + 1}$
   -b- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 5}$
   -c- $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x^2 + 5}$
   -d- $x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 + 2}$

4) -a- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4}$
   -b- $x \mapsto \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4}$

5) -a- $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2 - 4x + 1}$
   -b- $x \mapsto \dfrac{2x + 3}{4x^2 - 4x + 1}$

6) -a- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$
   -b- $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$
   -c- $x \mapsto \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

7) -a- $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2 + 4x + 5}$
   -b- $x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{4x^2 + 4x + 5}$

8) -a- $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{2x}$
   -b- $x \mapsto (x^2 + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$

9) -a- $x \mapsto x\sin(2x)$
   -b- $x \mapsto x^2 \cos x$

10) -a- $x \mapsto \sin x\,\mathrm{e}^{2x}$
    -b- $x \mapsto \cos(2x)\,\mathrm{e}^{-x}$

11) -a- $x \mapsto \cos^2 x \sin x$
    -b- $x \mapsto \cos^5 x$
    -c- $x \mapsto \sin^4 x$

Exercice 2. ($*$) Déterminer les primitives sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de tan, $\tan^2$, $\tan^3$ et $\tan^4$.

Exercice 3. ($*$) Calculer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + 2}$.

[On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$, que l'on déterminera tels que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + 2} = ax + b + \dfrac{c}{x^2 + 2}$.]

Exercice 4. ($*$) Après avoir justifié leur existence, déterminer, à l'aide d'intégration par parties, une primitive de:

1) $x \mapsto x \operatorname{Arctan} x$
2) $x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan} x$
3) $x \mapsto \sin(\ln x))$
4) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 5. ($**$) Après avoir justifié leur existence, déterminer une primitive de:

1) $x \mapsto \mathrm{e}^{\operatorname{Arccos}(t)}$
2) $x \mapsto x \sin^3 x$
3) $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$
4) $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x \sin(2x)$

Exercice 6. (♡) Après avoir justifié leur existence, calculer, à l'aide du changement de variable indiqué, les intégrales:

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, $u = \sin x$
2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x}$, $u = \cos x$
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, $u = \sin x$
4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$, $u = \tan x$

Exercice 7. ($**$) Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur un intervalle où une primitive existe.

1) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sin^2 x - \cos x}$
2) $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x \cos(2x)}$
3) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$
4) $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1 + \tan x}$.

Exercice 8. ($**$) Après avoir justifier leur existence, déterminer une primitive de :

1) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}$. On pourra poser $u = \sqrt{1 + t}$.
2) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{(1 - x)^3}}$. On pourra poser $u = \sqrt{\dfrac{t}{1 - t}}$.
3) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x - 1} + x}$. On pourra poser $u = \sqrt{t - 1}$.