

Exercice 2. (*) Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} . On suppose que A et B sont majorées.

- 1) Montrer que $A \cup B$ est majorée.
- 2) Exprimer $\sup A \cup B$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

Correction -

- 1) Comme A et B sont majorées, posons M_A, M_B réels tels que :

$$\forall x \in A, x \leq M \quad \forall x \in B, x \leq M_B.$$

Donc, pour $x \in A \cup B$, alors $x \leq M_A$ si $x \in A$ et $x \leq M_B$ si $x \in B$. Donc $x \leq \max(M_A, M_B)$.

Donc $A \cup B$ est majorée.

- 2) Comme $A \cup B$ est une partie non vide majorée de \mathbb{R} alors $\sup(A \cup B)$ existe.

En refaisant le raisonnement de 1) avec $M_A = \sup A$ et $M_B = \sup B$, on obtient que $\max(\sup A, \sup B)$ est UN majorant de $A \cup B$ donc est plus grand que le plus petit des majorants de $A \cup B$, donc $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$ (*).

Puis comme $A \subset A \cup B$, alors tout majorant de $A \cup B$, majore A donc en particulier $\sup(A \cup B)$ est UN majorant de A , il découle que $\sup A \leq \sup(A \cup B)$. De même, $\sup B \leq \sup(A \cup B)$. On déduit que $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$ (**).

On déduit donc de (*) et (**) l'égalité $\boxed{\max(\sup A, \sup B) = \sup(A \cup B)}$.

Exercice 4. (*) Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . On pose $M = \sup A$ et on suppose que M n'est pas le maximum de A (oubli dans l'énoncé original)

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'éléments de A dans l'intervalle $[M - \varepsilon, M]$.

Correction - NB: le fait qu'il existe UN tel élément est la caractérisation de sup avec les ε . On va donc montrer qu'il en existe une infinité.

Notons que M n'étant pas le maximum de A alors $M \notin A$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $M - \varepsilon$ ne majore pas A , il existe $x_1 \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_1 < M$ (inégalité stricte à droite car $M \notin A$).

Comme x_1 ne majore pas A , il existe $x_2 \in A$ tel que $x_1 < x_2 < M$.

Etc... On itère ce procédé, on construit donc une suite (x_n) d'éléments de A strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, M - \varepsilon \leq x_n < M$.

$\boxed{\text{Il existe donc bien une infinité d'éléments de } A \text{ dans l'intervalle } [M - \varepsilon, M]}$.

Exercice 6. (*) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Correction - Méthode 1 : à l'aide de la caractérisation. On remarque d'ailleurs que cette égalité est la même que celle de la question 1) de l'exercice ..., en posant $a = \frac{x}{2}$. On a $\lfloor a \rfloor + \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2a \rfloor$ c'est-à-dire $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Méthode 2 : en exploitant la périodicité. On pose $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Il s'agit de prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Un calcul rapide montre que $f(x+1) = f(x)$ donc f est 1-périodique, il suffit donc de montrer que f est nulle sur $[0, 1[$. Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ alors $\frac{x}{2} \in [0, \frac{1}{4}[$ et $\frac{x+1}{2} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ donc les trois parties entières sont nulles donc $f(x) = 0$.

Exercice 7

- 2) (**) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) $x \lfloor x \rfloor = x^2 - \lfloor 2x \rfloor^2$.

Correction -

- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $x = \lfloor x \rfloor + d$ où $d \in [0, 1[$

$$(E) \Leftrightarrow x(x - \lfloor x \rfloor) = \lfloor 2x \rfloor^2$$

$$\Leftrightarrow xd = \lfloor 2x \rfloor^2 \quad (*)$$

Analyse : soit x solution de (E) comme d et $\lfloor 2x \rfloor^2$ sont positifs alors d'après (*), $x \geq 0$.

0 est solution de (E). Puis si $x > 0$, comme $d < 1$, alors $xd \leq x$ c'est-à-dire d'après (*), $\lfloor 2x \rfloor^2 \leq x$ (**).

Par un calcul déjà vu $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ ou $\lfloor x \rfloor + 1$ selon que $d \leq \frac{1}{2}$ ou $d > \frac{1}{2}$. Puis $x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc l'inégalité (**) devient

$$4\lfloor x \rfloor^2 < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{ou} \quad 4\lfloor x \rfloor^2 + 4\lfloor x \rfloor + 1 < \lfloor x \rfloor + 1$$

et donc

$$4\lfloor x \rfloor^2 < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{ou} \quad 4\lfloor x \rfloor^2 + 3\lfloor x \rfloor + 1 < 1$$

Comme $\lfloor x \rfloor$ est entier, positif (car $x \geq 0$), cette inégalité n'est possible que si $\lfloor x \rfloor = 0$ c'est-à-dire $x \in [0, 1[$.

Synthèse : soit $x \in [0, 1[$, alors $\lfloor x \rfloor = 0$, donc

$$(E)0 \Leftrightarrow x^2 - \lfloor 2x \rfloor^2 \Leftrightarrow x^2 = \lfloor 2x \rfloor^2.$$

Or $x^2 \in [0, 1[$ et $\lfloor 2x \rfloor^2$ est entier, l'égalité n'est donc possible que si $x = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble-solution de (E) est } \{0\}}$.

Exercice 8. (**) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que : $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Correction - Méthode 1. A l'aide de la caractérisation. Posons $x = \lfloor x \rfloor + d$ où $d \in [0, 1[$. Alors $nx = n\lfloor x \rfloor + nd$ où $nd \in [0, n[$. Donc $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nd \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nd \rfloor$. Donc $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nd \rfloor}{n}$.

Comme $nd \in [0, n[$ alors $\lfloor nd \rfloor \in [0, n[$ et donc $\frac{\lfloor nd \rfloor}{n} \in [0, 1[$.

On déduit donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Méthode 2. Une méthode astucieuse. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$. Il s'agit de prouver que f est nulle.

Un calcul rapide prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$ c'est-à-dire f est 1-périodique. Il suffit donc de prouver que $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$. Or pour $x \in [0, 1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$. Puis, $nx \in [0, n[$ donc $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [0, 1[$ et donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$. On a donc bien $f(x) = 0$.

Exercice 9. (*) Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2) En déduire une expression simple de $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

3) Calculer la limite de $S_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction - Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) D'après la caractérisation de la partie entière, on pose: $x = \lfloor x \rfloor + d$ où $d \in [0, 1[$.

Alors $x + \frac{1}{2} = \underbrace{\lfloor x \rfloor + d + \frac{1}{2}}_{\in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[}$ (*) et $2x = 2\lfloor x \rfloor + \underbrace{2d}_{\in [0, 2[}$ (**).

Ce qui nous amène à distinguer les cas suivants.

- Si $d \in [0, \frac{1}{2}[$, alors $d + \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[\subset [0, 1[$ et $2d \in [0, 1[$, donc l'unicité des décompositions (*), (**) donne:

$$\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \quad \text{donc} \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

- Si $d \in [\frac{1}{2}, 1[$, alors $d + \frac{1}{2} \in [1, \frac{3}{2}[$ et $2d \in [1, 2[$, donc les décompositions (*), (**) deviennent:

$$x + \frac{1}{2} = \lfloor x \rfloor + 1 + \underbrace{d - \frac{1}{2}}_{\in [0, \frac{1}{2}[} \quad 2x = 2\lfloor x \rfloor + 1 + \underbrace{2d - 1}_{\in [0, 1[}$$

Donc l'unicité de la décomposition donne:

$$\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \quad \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{donc} \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

Dans tous les cas, $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \quad (\lfloor u \rfloor + \lfloor u + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2u \rfloor) \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2^0} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor \\ &= \boxed{S_n(x) = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor}. \end{aligned}$$

3) Tout d'abord, pour $x = 0$, $S_n(0) = \lfloor 0 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor = 0$.

Puis $\frac{x}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0_+ & \text{si } x > 0 \\ 0_- & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Or $\lfloor u \rfloor \xrightarrow{u \rightarrow 0} \begin{cases} -1 & \text{si } u \rightarrow 0_- \\ 0 & \text{si } u \rightarrow 0_+ \end{cases}$. Donc par composition des limites:

$$\left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Et donc par différence,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \begin{cases} [x] - 1 & \text{si } x < 0 \\ [x] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 10. (\heartsuit) Montrer que $A = \{r^3 / r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

Correction - Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , on peut poser $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt[3]{a} < r < \sqrt[3]{b}$. Comme $t \mapsto t^3$ est strictement croissante alors $a < r^3 < b$. Donc $]a, b[\cap A \neq \emptyset$ donc A est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 11. (*) Soient A et B deux parties de \mathbb{R} tels que $A \subset B \subset \mathbb{R}$.

On suppose que A est dense dans B et B dense dans \mathbb{R} . Montrer que A est dense dans \mathbb{R} .

Correction - Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Comme B est dense dans \mathbb{R} , on peut poser $\alpha \in B$ tel que $a < \alpha < b$. Puis de nouveau B dense dans \mathbb{R} , posons $\beta \in B$ tel que $\alpha < \beta < b$.

Enfin comme A est dense dans B , posons $\gamma \in A$ tel $\alpha < \gamma < \beta$. Finalement $a < \gamma < b$. Donc $]a, b[\cap A \neq \emptyset$ et donc A est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 12. (*) Déterminer s'ils existent la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum, le minimum de l'ensemble $A = \{\cos n / n \in \mathbb{Q}\}$.

Correction - $\max A = \sup A = 1$ en effet A est majoré par 1 et $1 \in A$ ($1 = \cos 0$).

$\inf A = -1$. Tout d'abord -1 est un minorant de A . Puis, posons (r_n) une suite de rationnels telle que $r_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi$ alors $\cos(r_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \cos \pi = -1$.

Donc $(\cos(r_n))$ est une suite de A qui tend vers -1 . D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\inf A = -1$.

A n'admet pas de minimum. Par l'absurde, si A admet un minimum alors il est la borne inférieure -1 . Or $-1 \notin A$ car $\pi + 2k\pi$ n'est pas rationnel.