Exercice 6. $(*)$ Résoudre $\begin{cases} y''+2y'+2y=\sin(x)\,\mathrm{e}^x \\ y(0)=1 \qquad y'(0)=0 \end{cases}$ d'inconnue $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Correction - La solution générale est $x\mapsto \dfrac{9}{8}\,\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)+\dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{x}(\sin x-\cos x)$.
Pour obtenir une solution particulière on écrit $\sin x\,\mathrm{e}^x=\frac{1}{2\,\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}-\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x})$ *puis on applique le principe de superposition.*

Exercice 8 Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

1) $y''+y=|x|+1$ 2) $y''-4y=\mathrm{e}^{|x|}$

Correction -

1) Juste le résultat :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}\lambda\cos x+\mu\sin x+x+1 & \text{si } x\geqslant 0\\ \lambda\cos x+(2+\mu)\sin x-x+1 & \text{si } x<0\end{cases}\end{array} \;/\; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}}.$$

2)
- On pose (E) $y''-4y=\mathrm{e}^{|x|}$. On résout (E) sur $\mathbb{R}_-$ puis sur $\mathbb{R}^+$. On pose alors
$$(E_1)\ y''-4y=\mathrm{e}^{-x}\ \text{ sur }]-\infty,0] \qquad (E_2)\ y''-4y=\mathrm{e}^{x}\ \text{ sur } [0,+\infty[.$$
- On résout (E_1). L'équation caractéristique est $r^2-4=0$ dont les solutions sont 2 et -2.
La solution générale de l'équation homogène est $x\in]-\infty,0]\mapsto\lambda_1\,\mathrm{e}^{2x}+\mu_1\,\mathrm{e}^{-2x}$ où $(\lambda_1,\mu_1)\in\mathbb{R}^2$.
On remarque que $y_{p,1}:x\mapsto-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$ est solution particulière de (E_1).
On en déduit la solution générale de (E_1), $y_1:x\in]-\infty,0]\mapsto\lambda_1\,\mathrm{e}^{2x}+\mu_1\,\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$ où $\lambda_1\in\mathbb{R},\mu_1\in\mathbb{R}$.
- De manière similaire, la solution générale de (E_2) est $y_2:x\in[0,+\infty[\mapsto\lambda_2\,\mathrm{e}^{2x}+\mu_2\,\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x}$ où $(\lambda_2,\mu_2)\in\mathbb{R}^2$.
- Raccord des solutions en 0. Comme y est deux fois dérivable, on doit donc avoir: $\begin{cases}y_1(0)=y_2(0) & \text{(continuité)}\\ y_1'(0)=y_2'(0) & \text{(dérivable une fois)}\\ y_1''(0)=y_2''(0) & \text{(dérivable deux fois)}\end{cases}$. Or pour tout $x\in\mathbb{R}_-$, $\begin{cases}y_1'(x)=2\lambda_1\,\mathrm{e}^{2x}-2\mu_1\,\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}\\ y_1''(x)=4\lambda_1\,\mathrm{e}^{2x}+4\mu_1\,\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\begin{cases}y_2'(x)=2\lambda_2\,\mathrm{e}^{2x}-2\mu_2\,\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x}\\ y_2''(x)=4\lambda_2\,\mathrm{e}^{2x}+4\mu_2\,\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x}\end{cases}$. Donc,
$$\begin{cases}y_1(0)=y_2(0)\\ y_1'(0)=y_2'(0)\\ y_1''(0)=y_2''(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\mu_1-\frac{1}{3}=\lambda_2+\mu_2-\frac{1}{3}\\ 2\lambda_1-2\mu_1+\frac{1}{3}=2\lambda_2-2\mu_2-\frac{1}{3}\\ 4\lambda_1+4\mu_1-\frac{1}{3}=4\lambda_2+4\mu_2-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\mu_1=\lambda_2+\mu_2\\ \lambda_1-\mu_1+\frac{1}{3}=\lambda_2-\mu_2\\ \lambda_1+\mu_1=\lambda_2+\mu_2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2+\mu_2=\lambda_1+\mu_1\\ \lambda_2-\mu_2=\lambda_1-\mu_1+\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2=\lambda_1+\frac{1}{6}\\ \mu_2=\mu_1-\frac{1}{6}\end{cases}.$$
- Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc:
$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{2x}+\mu\,\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x\leqslant 0\\ \left(\lambda+\frac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{2x}+\left(\mu-\frac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}\end{array} \;/\; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}}.$$

Exercice 9. $(*)$ Soit $m\in\mathbb{R}$. Résoudre en fonction du paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(E)\ \ y''+4y=\cos(mx) \quad \text{où} \quad y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

Correction - Si $m\neq\pm2$, $x\mapsto\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)+\dfrac{\cos(mx)}{4-m^2}$
Si $m=\pm2$, $x\mapsto\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)+\dfrac{1}{8}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}x\sin(2x)$

Exercice 12. $(*)$ Résoudre l'équation (E) $\;y'''+y''+y'+y=0$ où $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *On pourra poser $z=y''+y$.*

Correction - $(E)\Leftrightarrow z+z'=0$ où l'on a posé $z=y''+y$. On reconnaît alors une équation du premier ordre.
$$\begin{aligned}(E)&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}\,/\,\forall x\in\mathbb{R},\ \ z(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-x}\\ &\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}\,/\,\forall x\in\mathbb{R},\ \ y''(x)+y(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

On reconnait alors une équation du second ordre à coefficients constants que l'on résout :

$$(E) \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \mu\cos x + \nu \sin x + \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Exercice 13. ($*$) On veut résoudre l'équation $(E)\ :\ x(1+x)y'' - xy' + y = 0$ pour $x \in]0,+\infty[$.

1) Vérifier que $x \mapsto x$ est solution de (E).
2) Soit a une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. On pose $y : x \mapsto a(x)x$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si a est solution d'une équation différentielle (F).
3) Résoudre l'équation (F).
4) Achever alors la résolution de (E) sur $]0,+\infty[$.
5) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Correction - *Quelques éléments de correction, les calculs sont laissés au lecteur.*

1) Calcul simple.
2) Après calculs [...], on obtient :
$$y \text{ solution de } (E) \ \Leftrightarrow a \text{ solution de } (F)\ :\ x(x+1)a''(x) + (x+2)a'(x) = 0$$
3) Pour résoudre (F), on pose $\alpha = a'$, α vérifie alors une équation du premier degré : $(F')\ :\ x(x+1)\alpha'(x) + (x+2)\alpha(x) = 0$.
4) Après calculs, on obtient $\mathcal{S}_{(F')} = \{x \mapsto \lambda\frac{x+1}{x^2} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
En intégrant, on obtient $\mathcal{S}_{(F)} = \{x \mapsto \lambda(\ln x - \frac{1}{x}) + \mu \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
5) Puis en multipliant par x, $\mathcal{S}_{(E),\mathbb{R}_+^*} = \{x \mapsto \lambda(x\ln x - 1) + \mu x \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
6) On pose $y_1 : x \mapsto \lambda_1(x\ln x - 1) + \mu_1 x$ solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y_2 : x \mapsto \lambda_2(x\ln|x| - 1) + \mu_2 x$ solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
On effectue le raccord des solutions.
Tout d'abord pour la continuité: $y_1(x) \overset{[}{x} \to 0_+] \longrightarrow -\lambda_1$ et $y_2(x) \overset{[}{x} \to 0_-] \longrightarrow -\lambda_2$, ce qui impose $\lambda_1 = \lambda_2$ on prolonge alors y_1 et y_2 par continuité en posant $y_1(0) = y_2(0) = -\lambda_1$.
Pour la dérivabilité, pour $x > 0$
$$\frac{y_1(x) - y_1(0)}{x - 0} = \frac{\lambda_1 x\ln x + \mu_1 x}{x} = \lambda_1 \ln x + \mu_1 \overset{[}{x} \to 0] \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda_1 < 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda_1 > 0\,. \\ \mu_1 & \text{si } \lambda_1 = 0 \end{cases}$$
Idem pour y_2. Ce qui impose $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\mu_1 = \mu_2$.
Reste alors : $y_1 : x \mapsto \mu_1$ et $y_2 : x \mapsto \mu_1 x$.
La fonction $x \mapsto \mu_1 x$ est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\mathcal{S}_{(E),\mathbb{R}} = \{x \mapsto \mu x \ / \ \mu \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 14. ($*$) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = -2x + \mathrm{e}^t \end{cases}$

Correction - **Analyse** : soit (x,y) un couple solution du système (S).
Comme $x' = x - y + 1$ et x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors x' est dérivable avec : $x'' = x' - y'$, on injecte la 2ème équation $y' = -2x + \mathrm{e}^t$, on obtient alors :
$$x'' - x' - 2x = -\,\mathrm{e}^t\,.$$
Equation différentielle du second ordre que l'on résout : $x : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{2t} + \mu\,\mathrm{e}^{-t}$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
On remplace x ainsi trouvée dans la deuxième équation, pour obtenir y après avoir calculé une primitive : $y : t \mapsto -\lambda\,\mathrm{e}^{2t} + 2\mu\,\mathrm{e}^{-t} + \nu$ où $\nu \in \mathbb{R}$. **Synthèse** : posons $x : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{2t} + \mu\,\mathrm{e}^{-t}$ et $y : t \mapsto -\lambda\,\mathrm{e}^{2t} + 2\mu\,\mathrm{e}^{-t} + \nu$ où $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$.
On remplace dans (S) et on montre après simplification des calculs *[laissés au lecteur]* : (x,y) solution de (S) si et seulement si $\nu = 1$.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(S)} = \left\{(t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{2t} + \mu\,\mathrm{e}^{-t}, -\lambda\,\mathrm{e}^{2t} + 2\mu\,\mathrm{e}^{-t} + 1) \ / \ (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3\right\}}$

Remarque : vous verrez plus tard une méthode matricielle pour résoudre ce genre de système différentiel.

Exercice 16. ($**$) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que
$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Correction - Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$(E) \quad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1) On pose l'équation $(F) \quad y'' + y = 2\,\mathrm{ch}\, x$ où $y :\to \mathbb{R}$.

2)
- **Analyse**. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x \quad (E)$$

Alors: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$. Comme f et la fonction exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composée et somme que f' est dérivable, c'est-à-dire $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable}}$. On dérive donc la relation (E), il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) - f'(-x) = \mathrm{e}^x \quad (*)$$

D'après (E), en remplaçant x par $-x$ (possible car vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$) on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(-x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

ce qui injecté dans $(*)$ donne: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2\,\mathrm{ch}\, x.$

$\boxed{f \text{ vérifie donc l'équation } f'' + f = 2\,\mathrm{ch}\, x \ (F)}$.

Résolution de (F)**.** La solution générale de l'équation homogène associée est $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On remarque que $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est solution particulière évidente de l'équation (F).
Donc la solution générale de (F) est $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \mathrm{ch}(x)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Donc f est de cette forme.

- **Synthèse.** Posons $f : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \mathrm{ch}(x)$, alors $f' : x \mapsto -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) + \mathrm{sh}(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) + f(-x) &= (-\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) + \mathrm{sh}(x)) + (\lambda\cos(-x) + \mu\sin(-x) + \mathrm{ch}(-x)) \\ &= (-\lambda - \mu)\sin(x) + (\lambda + \mu)\cos(x) + \mathrm{e}^x\,. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}, \quad (\lambda + \mu)(\cos x - \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda + \mu = 0 \qquad \text{(en prenant en particulier } x = 0) \end{aligned}$$

L'implication $\Leftarrow$ est claire et l'implication $\Rightarrow$ est obtenue en prenant en particulier $x = 0$.

⚠ **Attention** ⚠ Il fallait bien utiliser le quantificateur $\forall$, c'est parce que l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ que l'on est autorisé à prendre $x = 0$.

- **Conclusion.** $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x) \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$

Exercice 17. $(***)$ Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x + y) = f(x)f(y), \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction - **Objectif** : *dériver l'équation fonctionnelle pour se ramener à une équation différentielle.*

- **Analyse** : soit f solution du problème. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et dérivons la relation $f(x + y) = f(x)f(y)$ $(*)$ par rapport à y, on obtient :

$$f'(x + y) = f(x)f'(y) \qquad \text{relation valable donc pour tout } x, y \text{ dans } \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $y = 0$: $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(0)f(x)$. f vérifie donc une équation différentielle du premier $f'(x) - af(x) = 0$ où $a = f'(0)$.
On résout cette équation, f est donc de la forme $f : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{ax}$.
On peut déterminer λ, en déterminant la valeur de $f(0)$. On prend $x = y = 0$, $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0)(1 - f(0)) = 0$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Si $f(0) = 0$ alors $\lambda = 0$. Si $f(0) = 1$ alors $\lambda = 1$.
Finalement, f est la fonction nulle ou bien f est de forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$.

- **Synthèse**. La fonction nulle vérifie clairement la relation $(*)$.
Puis posons $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = \mathrm{e}^{a(x+y)} = \mathrm{e}^{ax+ay} = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{e}^{ay} = f(x)f(y)$ donc f vérifie $(*)$.

- **Conclusion.** $\boxed{\text{L'ensemble-solution de l'équation proposée est } \{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \ / \ a \in \mathbb{R}\}}$.