

Exercice 1 Après avoir justifié leur existence, déterminer les primitives des fonctions suivantes

- 1) -a- sur \mathbb{R}_+ , $x \mapsto \frac{x^5}{5} - x^3 + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$
- b- sur $I \subset \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{-1}{x} + \frac{5}{2x^2} + C$
- c- sur $I \subset \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$
- 2) -a- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{6}(3 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
- b- sur \mathbb{R} , $x \mapsto -\frac{1}{3}(2 + \cos(2x))^{\frac{3}{2}} + C$
- c- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{-1}{2(4 + e^x)^2} + C$
- a- sur \mathbb{R} , $x \mapsto -\text{Arctan}(\cos x) + C$
- b- sur $I \subset \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \ln|e^x - 1| + C$
- c- sur $] -\infty, 0[$, $x \mapsto \text{Arcsin}(e^x) + C$
- 3) -a- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 1) + C$
- b- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$
- c- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + \frac{1}{\sqrt{5}} \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$
- d- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{6}} \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{6}x}{2}\right) + C$
- 4) -a- sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $x \mapsto \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$
- b- sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $x \mapsto \frac{1}{4} \ln|x+2| + \frac{7}{4} \ln|x-2| + C$
- 5) -a- sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $x \mapsto \frac{-1}{2(2x-1)} + C$
- b- sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $x \mapsto \frac{1}{2} \ln|2x-1| - \frac{2}{2x-1} + C$
- 6) -a- sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$
- b- sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $x \mapsto \frac{9}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x-1| + x + C$
- c- sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $x \mapsto 10 \ln|x-3| - \ln|x-1| + 2x + C$
- 7) -a- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{4} \text{Arctan}\left(x + \frac{1}{2}\right) + C$
- b- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{16} \text{Arctan}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \ln(4x^2 + 4x + 5) + C$
- 8) -a- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$
- b- sur \mathbb{R} , $x \mapsto -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 3e^{-x} + C$
- 9) -a- sur \mathbb{R} , $x \mapsto -\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$
- b- sur \mathbb{R} , $x \mapsto x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$
- 10) -a- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{5} e^{2x} (-\cos x + 2 \sin x) + C$
- b- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{5} e^{-x} (-\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + C$
- 11) -a- sur \mathbb{R} , $x \mapsto -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$
- b- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$
- c- sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{32} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3x}{8} + C$

Exercice 3

- 2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + 2} = x - 1 + \frac{2}{x^2 + 2}$.
- 3) Primitives: $x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + \sqrt{2} \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

- 1) sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{2} \text{Arctan} x(x^2 + 1) - \frac{x}{2} + C$
- 2) sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{3} x^3 \text{Arctan} x + \frac{1}{6} \ln(1 + x^2) - \frac{x^2}{6} + C$
- 3) sur \mathbb{R}_+^* , $x \mapsto \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$
- 4) sur \mathbb{R}_+^* , $x \mapsto \frac{1}{1-n} \frac{\ln x}{x^{n-1}} - \frac{1}{(1-n)^2} \frac{1}{x^{n-1}} + C$

Exercice 5

- 1) Changement de variable $t = \cos u$, puis après calcul les primitives sont : $x \mapsto \frac{1}{2} e^x (\sqrt{1-x^2} - x) + C$.
- 2) Une IPP, les primitives sont : $x \mapsto x \sin^3 x + \sin x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{9} \sin^3 x + C$.
- 3) Plus dur. Chgt de variable : $u = \text{sh } t$. Pour le changement de borne on aura besoin de résoudre :

$$x = \text{sh } u \Leftrightarrow [\dots \text{calcul faire} \dots] \Leftrightarrow u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Les primitives sont : $x \mapsto \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$.

- 4) On passe par les complexes, $x^2 e^x \sin(2x) = \text{Im}(x^2 e^{(1+2i)x})$ puis deux IPP, les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)e^x((-x+1)\cos x + (x+1)\sin x) + C$.

Exercice 6

- 1) $\frac{\pi}{4}$
- 2) $\frac{\ln 3}{2}$
- 3) $\ln(1 + \sqrt{2})$
- 4) $\ln 3$

Exercice 7

- 1) Changement de variable $u = \cos t$, les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\cos x - \alpha}{\cos x - \beta} \right|$ où $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
- 2) Changement de variable $u = \sin$, les primitives sont $x \mapsto \ln |\cos x| - \frac{1}{2} \ln |1 - 2 \sin^2 x|$
- 3) $\frac{\sin x}{\sin x - \cos x} = 1 + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (forme $\frac{u'}{u}$) pour le deuxième terme. Les primitives sont $x \mapsto x + \ln |\sin x - \cos x| + C$.
- 4) Trop difficile pour figurer dans cette fiche, on verra lorsque l'on aura la décomposition en éléments simples.

Exercice 8

- 1) On pose $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$. f est continue sur $] -1, +\infty[$ donc y admet des primitives.

Soit $x \in] -1, +\infty[$, on pose $u = \sqrt{1+t}$ dans $\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$, alors

$$u^2 = 1 + t \quad \text{donc} \quad t = u^2 - 1 \quad \text{donc} \quad dt = 2u du.$$

$$\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt = \int^{\sqrt{1+x}} \frac{u^2 - 1}{u} \times 2u du = 2 \int^{\sqrt{1+x}} (u^2 - 1) du$$

$$\boxed{\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt = \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + C}$$

- 2) On pose $f(x) = \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}$. f est continue sur $[0, 1[$ donc y admet des primitives.

Soit $x \in [0, 1[$, on pose $u = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ dans $\int^x \sqrt{\frac{t}{(1-t)^3}} dt$, alors

$$t = \frac{u^2}{1+u^2} \quad \text{donc} \quad dt = \frac{2u}{(1+u^2)^2} du.$$

Après quelques simplifications [...]

$$\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt = \int^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \frac{2u^2}{1+u^2} du$$

$$\boxed{\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt = 2 \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} \right) \right) + C}$$

- 3) On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$. f est continue sur $[1, +\infty[$ donc y admet des primitives.

Soit $x \in [1, +\infty[$, on pose $u = \sqrt{t-1}$ dans $\int^x \frac{1}{\sqrt{t-1}+1} dt$, alors

$$u^2 = t - 1 \quad \text{donc} \quad t = u^2 + 1 \quad \text{donc} \quad dt = 2u du.$$

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{\sqrt{t-1}+1} dt &= 2 \int^{\sqrt{x-1}} \frac{u}{u^2 + u + 1} du \\ &= 2 \int^{\sqrt{x-1}} \left(\frac{1}{2} \frac{(2u+1)}{u^2 + u + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) du \\ &= 2 \int^{\sqrt{x-1}} \left(\frac{1}{2} \frac{(2u+1)}{u^2 + u + 1} - \frac{2}{3} \frac{1}{(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})^2 + 1} \right) du \end{aligned}$$

$$\boxed{\int^x \frac{1}{\sqrt{t-1}+1} dt = \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x-1}| - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} \right) + C}$$