Trigonométrie

Exercice 4. ($\heartsuit$) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Exprimer $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$.

Correction - Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $z = x + \mathrm{i}\, y$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}\, y} = \frac{x-\mathrm{i}\, y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Alors: $\boxed{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2} \text{ et } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2}}$.

Exercice 6. ($*$)

1) Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$, montrer que $\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$.

2) Soient a, b, c des complexes de module 1, prouver que: $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

Correction -

1) Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$,

$$\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \left|\frac{a}{a\overline{a}} - \frac{b}{b\overline{b}}\right| = \left|\frac{1}{\overline{a}} - \frac{1}{\overline{b}}\right| = \left|\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{a}\overline{b}}\right| = \frac{|\overline{b-a}|}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{|b-a|}{|a||b|} = \frac{|a-b|}{|a||b|}.$$

Exercice 8. ($*$) Montrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, \quad |1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geqslant 1$.

Correction - $1 = |1| = |1 = |(1 + a) - (a + b) + (b + c) - c| \leqslant |a| + |a + b| + |b + c| + |c|$.

Exercice 9. ($**$) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et u une racine carrée de zz' (c'est-à-dire que $u^2 = zz'$).
Montrer que : $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$.

Correction - Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et u une racine carrée de zz'.
Soient a une racine carrée de z ($z = a^2$), b une racine carrée de z' ($z' = b^2$), alors ab est une racine carrée de zz' car $(ab)^2 = a^2b^2 = zz'$.
Donc $u = ab$ ou bient $u = -ab$. On le fait dans le cas $u = ab$ (le cas $u = -ab$ se traite de la même manière). On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right| &= \left|\frac{a^2+b^2}{2} + ab\right| + \left|\frac{a^2+b^2}{2} - ab\right| = \left|\frac{a^2+b^2+2ab}{2}\right| + \left|\frac{a^2+b^2-2ab}{2}\right| = \left|\frac{(a+b)^2}{2}\right| + \left|\frac{(a-b)^2}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}(|a+b|^2 + |a-b|^2) = \frac{1}{2}((a+b)(\overline{a+b}) + (a-b)(\overline{a-b})) = \frac{1}{2}(a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b}a\overline{a} - a\overline{b} - b\overline{a} + b\overline{b}) \\
&= |a|^2 + |b|^2 = |a^2| + |b^2| = |z| + |z'|.
\end{aligned}$$

Exercice 11. ($*$) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que $|x - u| = |1 - xu|$.

Correction - Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ de module 1. Notons que $|u| = 1$ donc $|u|^2 = 1$ c'est-à-dire $u\overline{u} = 1$ donc $\overline{u} = \frac{1}{u}$,

$$|x-u| = |\overline{x-u}| = |\overline{x} - \overline{u}| = |x - \frac{1}{u}| = |\frac{xu-1}{u}| = \frac{|xu-1|}{|u|} = |1-xu|.$$

Exercice 12. ($**$) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer que:

$$|z + z'| = |z - z'| \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z') + \frac{\pi}{2} \ [\pi].$$

Correction - Soit $(z,z')\in(\mathbb{C}*)^2$,

$$\begin{aligned}|z+z'|=|z-z'| &\Leftrightarrow |z+z'|^2=|z-z'|^2 \Leftrightarrow (z+z')(\overline{z+z'}) =\Leftrightarrow (z-z')(\overline{z-z'}) \Leftrightarrow (z+z')(\overline{z}+\overline{z'})=(z-z')(\overline{z}-\overline{z'})\\ &\Leftrightarrow z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}=z\overline{z}-z\overline{z'}-z'\overline{z}+z'\overline{z'} \Leftrightarrow z\overline{z'}+z'\overline{z}=0 \Leftrightarrow z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}=0\\ &\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)=0 \Leftrightarrow z\overline{z'}\in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z\overline{z'})=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(\overline{z'})=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(z')=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{aligned}$$

$$\boxed{|z+z'|=|z-z'| \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z)=\mathrm{Arg}(z')+\frac{\pi}{2}\ [\pi]}$$

Exercice 14 Soit $x\in\mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes

$$A=\cos(4x),\qquad B=\sin(5x) \text{ on exprimera } B \text{ uniquement en fonction de } \sin x.$$

Correction - Par la méthode classique (cf. cours):

$$\boxed{\cos(4x)=\cos^4 x-6\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1}\qquad \boxed{\sin(5x)=16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x}.$$

Exercice 15. (♡) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer les sommes:

1) $S=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\frac{\pi}{6}),\qquad T=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\frac{\pi}{6})$

2) $S=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(k\frac{\pi}{3}),\qquad T=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sin(k\frac{\pi}{3})$

3) $S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta),\qquad T=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$

Correction -

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta})=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}\right)\qquad (\mathrm{Re} \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire}).$$

On pose $Z=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}$,

$$Z=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})^k 1^{n-k}=(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,n\theta}{2}}.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient : $\boxed{S=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cos(\frac{n\theta}{2}) \text{ et } T=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\sin(\frac{n\theta}{2})}$.

Exercice 16. (∗) Soit $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)$.

Correction - Soit $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$. On linéarise $\cos^2(k\theta)$,

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1+\cos(2k\theta)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}1+\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)\right)=\frac{1}{2}\left(n+1+\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)\right).$$

Pour le calcul de $T_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)$ *on fait comme pour le calcul de* $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ *vu dans le cours (le faire!!), on donne le résultat du cours où l'on remplace* θ *par* 2θ*.*

$$T_n=\cos(n\,\theta)\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\quad \text{si}\quad \theta\neq 0\,[\pi]\qquad\qquad T_n=n+1\quad\text{si}\quad \theta=0\,[\pi].$$

Conclusions:

$$\boxed{S_n=\frac{1}{2}\left(n+1+\cos(n\,\theta)\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right)\quad \text{si}\quad \theta\neq 0\,[\pi]\qquad\qquad S_n=n+1\quad\text{si}\quad \theta=0\,[\pi]}.$$

Exercice 17. ♣ Soit $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos(k\frac{\pi}{3})$.

Correction - Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cos(k\frac{\pi}{3}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{k\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\,\mathrm{e}^{\frac{k\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}\right)^k\right).$$

Puis, on reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}$ de premier terme 1,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}\right)^k = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)\pi}{3}}}{1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}}.$$

La difficulté maintenant réside dans le fait que l'on ne peut appliquer la technique de l'agle moitié car numérateur et dénominateur ne sont pas de la forme $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Il faut chasser le i *dénominateur, ici on peut éviter de passer par la forme algébrique car on peut donner une forme trigonométrique sympatique du dénominateur.*

Notons que:

$$1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{6}}.$$

On en déduit:

$$T_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)\pi}{3}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{6}} - \frac{1}{2^{n+1}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}\right).$$

En identifiant la partie réelle, il vient:

$$S_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2^{n+1}}\cos\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

D'où: $\boxed{S_n = 1 + \frac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).}$

Exercice 19. (♡) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

4) $z^2 = |z|^2$

5) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0.$

Correction -

4) Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$(E_4) \Leftrightarrow z^2 = z\overline{z} \Leftrightarrow z(z - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}. \quad \text{Donc } \boxed{\mathcal{S}_{(E_4)} = \mathbb{R}}.$$

5) Posons $z = x + \mathrm{i}\,y$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(E_5) \Leftrightarrow 4(x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{i}\,xy) + 8(x^2+y^2) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 4y^2 - 3 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3}{4} \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = \pm\,\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \pm\frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}_{(E_4)} = \left\{\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}, -\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}}.$

Exercice 22. (♡) Déterminer:

1) les racines quatrièmes de $\dfrac{\mathrm{i}+\sqrt{3}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}$

2) les racines cinquièmes de $-\,\mathrm{i}$

3) les racines sixièmes de $\dfrac{-4}{1+\mathrm{i}}$

Correction -

2) $-\,\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}} = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{10}}\right)^5$. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$z^5 = -\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z^5 = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{10}}\right)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{10}}}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{10}}} \in \mathbb{U}_5 = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{5}} \ / \ k \in [\![0,4]\!]\right\}.$$

$\boxed{\text{Les racines cinquièmes de } -\,\mathrm{i} \text{ sont: } \left\{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{10}}, \mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{10}}, \mathrm{e}^{\frac{7\,\mathrm{i}\,\pi}{10}}, \mathrm{e}^{\frac{11\,\mathrm{i}\,\pi}{10}}, \mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{2}}\right\}}.$

3) $\dfrac{-4}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-4(1-\mathrm{i})}{2} = -2 + 2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \left(2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{8}}\right)^6$. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$z^6 = \frac{-4}{1+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z^6 = \left(2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{8}}\right)^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{8}}}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{8}}} \in \mathbb{U}_6 = \left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{3}} \ / \ k \in [\![0,5]\!]\right\}.$$

$\boxed{\text{Les racines cinquièmes de } -\,\mathrm{i} \text{ sont: } \left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\frac{11\,\mathrm{i}\,\pi}{24}}, \mathrm{e}^{\frac{19\,\mathrm{i}\,\pi}{24}}, \mathrm{e}^{\frac{9\,\mathrm{i}\,\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\frac{35\,\mathrm{i}\,\pi}{24}}, \mathrm{e}^{\frac{43\,\mathrm{i}\,\pi}{24}},\right\}}.$

Exercice 25. $(*)$ On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}$, on pose

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4, \qquad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

1) Calculer $S+T$, ST.

2) Déterminer le signe de $\mathrm{Im}(S)$.

3) En déduire les valeurs de S et T.

Correction -

1) **1ère méthode (pour le calcul de $S+T$) :**

$$S+T = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6 = \sum_{k=1}^{6}\omega^k = \omega\frac{1-\omega^6}{1-\omega} \quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique de raison } \omega \text{ de premier terme } \omega)$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{12\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{6\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{6\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}-\mathrm{e}^{\frac{6\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{7}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{7}}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{7}}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\frac{-2\,\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{7}}{-2\,\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}} = -1 \text{ donc } \boxed{S+T=-1}.$$

2ème méthode (pour le calcul de $S+T$):

$$S+T = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6 = \sum_{k=1}^{6}\omega^k = \sum_{k=0}^{6}\omega^k - \omega^0$$
$$= \frac{1-\omega^7}{1-\omega} - 1 \quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique de raison } \omega \text{ de premier terme } 1)$$
$$= -1 \quad \text{car } \omega^7 = 1.$$

Puis le calcul de ST:

$$ST = (\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6) = \omega^4(1+\omega+\omega^3)(1+\omega^2+\omega^3) = \omega^4(1+\omega^2+\omega^3+\omega+\omega^3+\omega^4+\omega^3+\omega^5+\omega^6)$$
$$= \omega^4(1+\omega+\omega^2+3\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6).$$

Or $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6 = \dfrac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0$ car $\omega^7=1$. D'où: $\quad ST = \omega^4\times 2\omega^3 = 2\omega^7 \quad$ d'où $\boxed{ST=2}$.

2) On a :

$$\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(\omega+\omega^2+\omega^4) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}+\mathrm{e}^{\frac{4\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}+\mathrm{e}^{\frac{8\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}\right) = \sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\underbrace{\sin\frac{8\pi}{7}}_{=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \underbrace{\sin\frac{4\pi}{7}}_{\geqslant 0} + \underbrace{\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}}_{\geqslant 0 \text{ car sin croissante sur } [0,\frac{\pi}{2}]} \qquad \text{d'où } \boxed{\mathrm{Im}(S)\geqslant 0}.$$

3) D'après 1), S et T sont solutions de l'équation (E) : $z^2+z+2=0$ de discriminant $\Delta=-7$.
En effet:

$$\begin{cases} S+T=-1 \\ ST=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=-1-T \\ (-1-T)T=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=-1-T \\ T^2+T+2=0 \end{cases}.$$

Et comme S et T jouent le même rôle S vérifie aussi $S^2+S+2=0$.

Les solutions de E sont donc $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$. D'après 2), $\mathrm{Im}(S)>0$ d'où $\boxed{S=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \text{ et } T=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}}$.

Exercice 26 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

6) $(*)$ $\quad \left(\dfrac{z+j}{z-j}\right)^2 + \dfrac{z+j}{z-j} + 1 = 0,\;$ où j vérifie $1+j+j^2=0$.

Correction -

6) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{j\}$,

$$(E_6) \Leftrightarrow Z^2+Z+1=0 \quad \text{où} \quad Z=\frac{z+j}{z-j} \Leftrightarrow Z=j \;\;\textbf{ou}\;\; Z=j^2 \Leftrightarrow \frac{z+j}{z-j}=j \;\;\textbf{ou}\;\; \frac{z+j}{z-j}=j^2$$
$$\Leftrightarrow z+j=j(z-j) \;\;\textbf{ou}\;\; z+j=j^2(z-j) \Leftrightarrow z(1-j)=-j^2-j \;\;\textbf{ou}\;\; z(1-j^2)=-j-j^3$$
$$\Leftrightarrow z(1-j)=1 \;\;\textbf{ou}\;\; z(1-j^2)=j^2 \text{ car } 1+j+j^2=0 \quad j^3=1$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{1-j} \;\;\textbf{ou}\;\; z=\frac{j^2}{1-j^2}=\frac{j^3}{(1-j^2)j}=\frac{1}{j-1}. \quad \text{Donc } \boxed{\mathcal{S}_{(E_6)}=\left\{\frac{1}{1-j},\frac{1}{j-1}\right\}}.$$

Exercice 27. $(**)$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Correction - $(**)$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord $z = 1$ n'est pas solution de (E_1) $(n + 1 \neq 1)$. Puis, Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$

$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = 0 \Leftrightarrow z^{n+1} = 1. \quad \text{Donc } \boxed{\mathcal{S}_{(E_1)} = \mathbb{U}_{n+1}}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord $z = 1$ n'est pas solution de (E_1) $(n + 1 \neq 1)$. Puis, Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$

$$(E_2) \Leftrightarrow (1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) + (z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - z^n}{1 - z} + z\frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - z^n + z - z^{n+1}}{1 - z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + z - z^n(1 + z)}{1 - z} = 0 \Leftrightarrow \frac{(1 + z)(1 - z^n)}{1 - z} = 0 \Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } z^n = 1. \quad \text{Donc } \boxed{\mathcal{S}_{(E_2)} = \mathbb{U}_n \cup \{-1\}}.$$

Exercice 28. $(*)$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $27(z - \mathrm{i})^6 - (z + \mathrm{i})^6 = 0$.

Correction - Méthode classique pour se ramener à $Z^6 = 1$ avec $Z = \dfrac{\sqrt{3}(z - \mathrm{i})}{z + \mathrm{i}}$. $\boxed{\text{L'ensemble solution est } \left\{ \dfrac{\mathrm{i}(\sqrt{3} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{3}})}{\sqrt{3} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{3}}} \ / \ k \in [\![0, 5]\!] \right\}}$

Exercice 30. $(**)$ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = a \\ x & +jy & +j^2z & = b \\ x & +j^2y & +jz & = c \end{array}\right.$

Correction - $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{3}(a + b + c), \frac{1}{3}(a + j^2b + jc), \frac{1}{3}(a + jb + j^2c) \right) \right\}}$.

Exercice 33. $(*)$ Soient A, B, C trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c.
Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} \in \mathbb{R}$.

Correction -

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{b - a}{c - a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{b - a}{c - a} = \overline{\frac{b - a}{c - a}} \Leftrightarrow \frac{b - a}{c - a} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{\overline{c} - \overline{a}} \Leftrightarrow (b - a)(\overline{c} - \overline{a}) = (c - a)(\overline{b} - \overline{a})$$
$$\Leftrightarrow a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} = \overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a \Leftrightarrow a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 35. $(**)$ Soient A, B, C trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives a, b, c.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $c - a = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}(b - a)$.

2) En déduire que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

3) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0.$$

Correction -

1)

$$ABC \text{ est équilatéral direct} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}\ \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |b-a| = |c-a| \\ \mathrm{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}\ \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \mathrm{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}\ \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}} \text{ (par identification des parties réelle et imaginaire)}$$

$$\boxed{ABC \text{ est équilatéral direct} \Leftrightarrow c-a = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}(b-a)}.$$

2) D'après 1),

$$ABC \text{ équilatéral direct} \Longleftrightarrow c-a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(b-a) \Longleftrightarrow c-a = -j^2(b-a) \qquad (\text{car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} = -j^2)$$

$$\Longleftrightarrow (-1-j^2)a + j^2b + c = 0$$

$$\Longleftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \qquad (\text{car } 1+j+j^2 = 0)$$

$$\boxed{ABC \text{ équilatéral direct} \Longleftrightarrow a + jb + j^2c = 0} \qquad (\text{en multipliant par } j^2 \text{ et en utilisant } j^3 = 1\ )$$

3) Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si il est équilatéral direct ou indirect. Or, de même que 1) on montre que le triangle est équilatéral indirect si et seulement si $b + ja + j^2c = 0$. Donc ABC est équilatéral si et seulement si

$$ABC \text{ équilatéral} \Longleftrightarrow b + ja + j^2c = 0 \quad \textbf{ou} \quad a + jb + j^2c = 0 \Longleftrightarrow (b + ja + j^2c)(a + jb + j^2c) = 0$$

$$\Longleftrightarrow ab + jb^2 + j^2bc + ja^2 + j^2ab + j^3ac + j^2ac + j^3bc + j^4c^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (1+j^2)ab + (j^2+j^3)bc + (j^2+j^3)ac + ja^2 + jb^2 + jc^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow -jab - jbc - jac + ja^2 + jb^2 + jc^2 = 0 \qquad (\text{car } j^3 = 1 \text{ et } 1+j+j^2 = 0)$$

$$\boxed{ABC \text{ équilatéral} \Longleftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0}.$$