Divisibilité - Congruences

Exercice 1. (♡) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 2. (♡) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes

1) $x - 3 | x + 7$
2) $x + 2 | x^2 + 2$

Exercice 3. (♡) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes

1) $xy = 3x + 4y$
2) $x^2 - y^2 = 5$
3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$
4) $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.

Exercice 4. (♡) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes

1) $x^2 - 2y^2 = 3$ en raisonnant modulo 8
2) $15x^2 - 7y^2 = 9$ en raisonnant modulo 3

Exercice 5. ($*$) Montrer que l'équation $2^n + 1 = m^3$ d'inconnue $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ n'admet pas de solution.

Exercice 6. ($**$) Soient $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.
2) En déduire que $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = 2^{a \wedge b} - 1$.

Exercice 7. (♡) Trouver le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13.

Exercice 8. (♡) Montrer que

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ 17 \mid 7^{8n+1} + 10(-1)^n$
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ 9 \mid 2^{2n} + 15n - 1$.

Exercice 9. ($*$) Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que $x^2 + y^2$ est divisible par 7 si et seulement si x et y le sont.
2) Montrer que si $x^3 + y^3 + y^3$ est divisible par 7 alors l'un des entiers x, y ou z l'est aussi.

Exercice 10. ($*$) Montrer que dans la suite (u_n) de terme général $u_n = 2^n - 3$, il y a:

1) une infinité de termes divisibles par 5
2) une infinité de termes divisibles par 13
3) aucun terme divisible par 65.

Exercice 11. ($*$) Montrer que le produit de k entiers consécutifs est divisible par $k!$.

PGCD-PPCM

Exercice 12. (♡) Déterminer le PGCD de a et b et étalissez une relation de Bezout dans les cas suivants

1) $a = 39$ et $b = 15$
2) $a = 41$ et $b = 23$
3) $a = 195$ et $b = 105$

Exercice 13. (♡) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer

1) $(2n + 4) \wedge (3n + 3)$
2) $(n^2 + n) \wedge (2n + 1)$

Exercice 14. ($*$) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes

1) $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases}$

Exercice 15. ($*$) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $11(x \wedge y) + (x \vee y) = 203$.

Entiers premiers entre eux

Exercice 16. ($\heartsuit$) Soient a et b deux nombres premiers entre eux.

1) Montrer que $a \wedge (a+b) = b \wedge (a+b) = 1$.

2) En déduire que $(a+b) \wedge ab = 1$.

Exercice 17. ($*$) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge bc = a \wedge c$.

Exercice 18. ($\heartsuit$) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes

1) $41x + 23y = 5$

2) $39x + 15y = 7$

Exercice 19. ($*$)Restes chinois

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x \equiv 7 \ [8] \\ x \equiv 1 \ [13] \end{cases}$.

2) Cas général. Soient deux entiers n_1 et n_2 premiers entre eux. Pour tout $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$, montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} x \equiv a_1 \ [n_1] \\ x \equiv a_2 \ [n_2] \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv p \ [n_1 n_2]$.

Exercice 20. ($*$)

1) Montrer qu'il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

2) Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 21. ($*$) L'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ admet-elle des solutions rationnelles?

Exercice 22. ($**$)- Triplets pythagoriciens

1) Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \wedge y = 1$.

   -a- Montrer que $y \wedge z = 1$.

   -b- Montrer que x ou y est pair. Quitte à les échanger, on suppose désormais y pair.

   -c- Montrer que $(y+z) \wedge (z-y) = 1$. Puis qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$, impairs et premiers entre eux tels que $y + z = a^2$ et $z - y = b^2$.

   -d- En déduire la forme du triplet (x, y, z).

2) Résoudre finalement l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23. ($*$) Soient $a_1, \ldots, a_n$ n entiers premiers entre eux deux à deux.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$\widetilde{a_i} = \prod_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} a_j.$$

Montrer que les entiers $\widetilde{a_1}, \ldots, \widetilde{a_n}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Nombres premiers

Exercice 24. ($\heartsuit$) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ n'est pas premier.

Exercice 25. ($\heartsuit$)

1) Soit $(a,d,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Montrer que si d divise n alors $a^d - 1$ divise $a^n - 1$.
2) Soit $m \in \mathbb{N}$. En déduire que si $2^m - 1$ est premier alors m est premier.

Exercice 26. ($*$) Déterminer les nombres premiers p tels que $p^2 + 2$ soit lui-même premier.

Exercice 27. ($\heartsuit$)

1) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que l'intervalle d'entiers $[\![n!+2, n!+n]\!]$ ne contient aucun nombre premier.
2) Montrer qu'il existe des intervalles d'entiers aussi long que l'on veut ne contenant pas de nombre premier.

Exercice 28. ($*$) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait alors il est la puissance 6ème d'un entier.

Exercice 29. ($**$) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p_n le n-ième nombre premier.

1) Montrer que $p_{n+1} \leqslant p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.
2) En déduire que $p_n \leqslant 2^{2^n}$.
3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Démontrer que pour x assez grand :
$$\ln(\ln(x)) \leqslant \pi(x) \leqslant x.$$

Exercice 30. ($**$)- Formule de Legendre Soit p un entier premier et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que :
$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$
où la somme est en réalité finie car $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ lorsque $p^k > n$.

Congruences

Exercice 31. ($*$)- Simplification d'une congruence
Soient $a, b, k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $k \wedge n = 1$.
Montrer que
$$a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow ka \equiv kb \ [n].$$

Exercice 32. ($*$)- Inverse modulo n Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un entier $a \in \mathbb{Z}$ admet un inverse modulo n s'il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel $aa' \equiv 1\,[n]$. On dit que a' est UN inverse modulo n.

1) Déterminer les couples $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $3u + 7v = 1$.
   En déduire que 3 admet un inverse modulo 7 et donner les inverses de 3 modulo 7.
2) Montrer que 4 n'admet pas d'inverse modulo 6.
3) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a admet un inverse modulo n si et seulement si $a \wedge n = 1$.
4) **Application**. Résoudre les deux équations : (E_1) $3x \equiv 4\,[20]$ (E_2) $12x \equiv 8\,[34]$.
5) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Déterminer les solutions de l'équation $ax \equiv b\,[n]$.