

Limites

Exercice 1. (♡) Calculer, si elles existent, les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \qquad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \qquad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$$

Exercice 2

- 1) (♡) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(\ln x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
- 2) (*) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3. (*) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe alors f est constante.

Exercice 4. (*) On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$

- 1) Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .
- 2) Calculer la limite de f en 0_+ .
- 3) Déterminer un équivalent de $f(x)$.

Exercice 5. (*) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ croissante. On pose pour $x \in]a, b[$, $h(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$.

- 1) Montrer que h est bien définie sur $]a, b[$.
- 2) Montrer que h est croissante sur $]a, b[$.

Exercice 6. (**) Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* tel que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{f(kx)}{x}$. Montrer que u converge et calculer sa limite.

Exercice 7. (*) Déterminer les fonctions définies sur \mathbb{R} vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x) \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

Étude de continuité

Exercice 8. (♡) On pose $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$.

- 1) Donner l'ensemble de définition de f . Puis étudier la continuité de f .
- 2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité.

Exercice 9. (\heartsuit) Soit $x > 0$. On pose pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) = (\sin t)^x$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 10. (\heartsuit) Après avoir donné leur ensemble de définition, étudier la continuité des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x + \sqrt{x - [x]} \qquad g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}.$$

Exercice 11. (*) Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de \mathbb{R} .

Exercice 12. (**) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} - [x + \frac{1}{2}] & \text{sinon.} \end{cases}$.

Montrer que f est bijective (on pourra calculer $f \circ f$). Montrer que f n'est continue en aucun point.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 13. (\heartsuit) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$.
Montrer que f admet un point fixe, i.e. il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 14. (\heartsuit) Montrer que toute fonction polynômiale de degré impair admet au moins une racine réelle. On pourra commencer par le degré 3.

Exercice 15. (\heartsuit) Soient f et g deux applications continues d'un intervalle I dans \mathbb{R} ne s'annulant pas sur I et telles que $|f| = |g|$.

- 1) Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.
- 2) Le résultat est-il encore vrai si f ou g s'annule?

Exercice 16. (*) Un cycliste a parcouru exactement 30 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 15 km.

[On pourra introduire la fonction $d : x \mapsto d(x)$, où $d(x)$ est la distance parcourue après x h du départ et exprimer la distance parcourue en une demi-heure.]

Exercice 17. (*) Montrer qu'une fonction continue sur \mathbb{R} qui ne prend qu'un nombre fini de valeur est constante.

Image d'un segment

Exercice 18. (\heartsuit) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.

- 1) Montrer que f est bornée.
- 2) f atteint-elle ses bornes?

Exercice 19. (*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$.

Montrer que $m = \inf f$ existe et que m est le minimum de f sur \mathbb{R} .

Théorème de la bijection monotone

Exercice 20

- 1) (♡) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle que l'on note x_n .
- 2) (♡) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la convergence de la suite (x_n) .
- 3) (*) Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $x_n - \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^4}$.
- 4) (**) Montrer que $x_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^7}$.

Exercice 21. (*) Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$.

- 1) Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
- 2) Étudier la monotonie de la suite u . En déduire la convergence.
- 3) Déterminer la limite de la suite.

Exercice 22. (*) Déterminer suivant le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $e^{\lambda x} = x$.

Équation fonctionnelle

Exercice 23. (♡) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues en 0 et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x).$$

On raisonne par analyse-synthèse.

- 1) **Analyse.** Soit f une telle fonction.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
 - a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{3^n}\right)$.
 - b- En déduire que $f(x) = f(0)$.
- 2) En déduire l'ensemble des fonctions cherchées.

Exercice 24. (*) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continues en 1 et telle que

$$\forall x > 0, f(x^2) = f(x).$$

Exercice 25. (**) On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur \mathbb{R} telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = x$.

- 1) Montrer que f est injective. En déduire que f est strictement croissante.
- 2) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.

Exercice 26. (*) On se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (E)$$

On raisonne par analyse-synthèse

1) **Analyse** Soit f une telle fonction.

-a- Préciser $f(0)$.

-b- Montrer que f est impaire.

-c- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.

-d- Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.

-e- Dédurre enfin que f est une fonction linéaire.

2) En déduire l'ensemble des fonctions cherchées.

3) En utilisant ce qui précède, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y). \quad (F)$$

Équivalents

Exercice 27. (♡) Calculer les limites suivantes, en utilisant si besoin des équivalents:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{(\ln x)^3 + x^2 - 5}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x \ln x)}{x}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x}{x^4 - 5x^2}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{3x^2 + 5x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \tan(2x)}{x(e^{2x} - 1)}$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(1+x) - \ln^2(x))$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos x}}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{3x^2 + 5x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1-x} - 1}$

10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(3x)}{1 - 2 \sin x}$

16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$

Divers

Exercice 28. (**) Autre démo du TVI

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

Prenons y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer : $\exists c \in [a, b] / y = f(c)$.

On pourra poser l'ensemble $A = \{x \in [a, b] / f(x) \leq y\}$, montrer qu'il admet une borne supérieure puis utiliser la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Exercice 29. (***) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ surjective. Montrer que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet une infinité de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. (***) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ surjective.

1) -a- On suppose que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

-b- En déduire que s'il existe $a > 0$ et $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+a) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{l}{a}$.

2) On suppose que pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.