Ensembles

Exercice 1. (♡) Soit E un ensemble non vide et A, B des parties de E. Montrer que

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow B^c \subset A^c.$$

Exercice 2. (♡) Soit E un ensemble non vide et A, B des parties de E. Montrer que

$$A = B \text{ si et seulement si } A \cap B = A \cup B.$$

Exercice 3. (♡) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Déterminer $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$.

Exercice 4. (∗) Soit E un ensemble non vide et A, B, C des parties de E.

1) Déterminer les fonctions indicatrices de $A \cap B$, A^c et $A \setminus B$ à l'aide de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
   En déduire les fonctions indicatrices de $A \cup B$ et $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2) Démontrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Injection-Surjection-Bijection

Exercice 5. (♡) Déterminer l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité des fonctions suivantes. Dans le cas de bijection exprimer la réciproque

1) $f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ lorsque
   -a- $E = F = \mathbb{R}$
   -b- $E = F = \mathbb{R}^+$
   -c- $E = \mathbb{R}^-$ et $F = \mathbb{R}^+$
   -d- $E = \mathbb{R}^+$, $F = \mathbb{R}$
   -e- $E = F = \mathbb{N}$
2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$
3) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (2a+b, -a+2b) \end{array}$

Exercice 6. (♡) On considère les applications:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} 2k & \text{si } k \geqslant 0 \\ -2k-1 & \text{si } k < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Qu'en déduit-on sur f et g?

Exercice 7. (∗) Peut-on définir une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$? Puis de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ puis de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 8. (♡) Soient E, F, G trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

1) $g \circ f$ injective et f surjective implique g injective
2) $g \circ f$ surjective et g injective implique f surjective

Exercice 9. (∗) Soit E un ensemble. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que:

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Exercice 10. (∗∗)Théorème de Cantor Soit E un ensemble. Démontrer qu'il n'existe pas de surjection de E vers $\mathcal{P}(E)$.
Raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble $A = \{x \in E \,/\, x \notin f(x)\}$.

Image directe-Image réciproque

Exercice 11. ($\heartsuit$) Soit f l'application qui à un complexe z associe $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2) Montrer que f est bijective de E vers un ensemble à préciser. Déterminer alors la réciproque.
3) Déterminer l'image directe de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ par f.
4) Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{R}$ par f.

Exercice 12. ($\heartsuit$) Soit $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

1) Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f.
2) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{N})$, $f(\mathbb{Z})$, $\overleftarrow{f}(\{0\})$, $\overleftarrow{f}(\{[0,1]\})$,.
3) On note g la restriction de f à $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Montrer que g est une bijection vers un ensemble d'arrivée à préciser.

Exercice 13. ($*$) Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. On considère A, A' deux parties de E et B, B' deux parties de F.

1) Montrer $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
2) Montrer que $\overleftarrow{f}(B \cap B') = \overleftarrow{f}(B) \cap \overleftarrow{f}(B')$.
3) -a- Montrer que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
   -b- Montrer que l'on n'a pas égalité en général.
   -c- Montrer qu'il y égalité si f est injective.

Exercice 14. ($*$) Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.
Montrer que: f injective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = \overleftarrow{f}(f(A))$.

Relations

Exercice 15. ($\heartsuit$) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Exercice 16. ($\heartsuit$) On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad (x,y) \ll (x',y') \quad \text{si} \quad [x < x'] \ \textbf{ou} \ [x = x' \text{ et } y \leqslant y'].$$

1) Montrer que $\ll$ est un ordre sur $\mathbb{R}^2$ (appelé ordre lexicographique) et que cet ordre est total.
2) -a- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Quel est l'ensemble des majorants de (a,b) pour la relation $\ll$? On fera un dessin.
   -b- $\mathbb{R}_-^*$ admet-il des majorants? Un plus grand élément?

Exercice 17. ($*$) Soit E et F deux ensembles ordonnés muni des relations d'ordre respectives $\leqslant$ et $\preccurlyeq$ et. Soit $\ll$ la relation binaire définie sur $E \times E$ par :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in (E \times F)^2, \quad (x,y) \ll (x',y') \quad \text{si} \quad [x \leqslant x' \text{ et } x \neq x'] \ \textbf{ou} \ [x = x' \text{ et } y \preccurlyeq y'].$$

1) Montrer que $\ll$ est un ordre sur $E \times F$, appelé ordre lexicographique.
2) Montrer que si les ordres $\preccurlyeq$ et $\leqslant$ sont totaux alors $\ll$ est total.