Exercice 2. (**) En utilisant $\cos(n+2)+\cos n$ et $\cos(2n)$ montrer que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Correction - Par l'absurde, supposons que $(\cos(n))$ converge, notons l la limite.
Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\cos(n+2)+\cos(n)=2\cos\left(\frac{n+2+n}{2}\right)\cos\left(\frac{n+2-n}{2}\right)=2\cos(n+1)\cos(1).\quad (*)$$

Comme suite extraite, $\cos(n+2)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $\cos(n+1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ donc par passage à la limite de $(*)$, $2l=2\cos(1)l$ donc $2l(1-\cos 1)$ donc $l=0$ car $\cos 1\neq 1$.
Puis $\cos(2n)=2\cos^2 n-1$, que l'on passe à la limite $l=2l^2-1$ donc $0=-1$ (car $l=0$), absurde.
Donc, $\boxed{\text{la suite } (\cos(n) \text{ diverge}}$.

Exercice 4. $(*)$ Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{3n}), (u_{2n+1}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Correction - Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{3n}), (u_{2n+1}) convergent, notons l, l' et l'' les limites respectives.
(u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}), (u_{3n}) donc admet pour limite l et l', par unicité $l=l'$.
(u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{2n+1}), (u_{3n}) donc admet pour limite l' et l'', par unicité $l'=l''$.
Donc $l=l'=l''$, d'où (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergent vers $l\in\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } l\in\mathbb{R}}$.

Exercice 5. (**) Soit u une suite réelle monotone. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}$. Montrer que v est monotone.

Correction - Supposons u croissante.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}u_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{n+1}u_{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{n+1}u_{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}u_k\quad (*)$$

Comme u est croissante alors pour tout $1\leqslant k\leqslant n$, $u_k\leqslant u_{n+1}$ donc en sommant

$$\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_{n+1}=nu_{n+1}\qquad\text{donc}\qquad -\sum_{k=1}^{n}u_k\geqslant -nu_{n+1}.$$

Par conséquent, en revenant à $(*)$,

$$v_{n+1}-v_n\geqslant\frac{1}{n+1}u_{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}\times nu_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)u_{n+1}=0.$$

Donc v est croissante.

Si u est décroissante, alors $-u$ est croissante et donc en posant $w_n=\dfrac{-u_1-\cdots-u_n}{n}$ d'après le cas croissant, il découle w croissante. Enfin, comme $v=-w$ alors v est décroissante.

On a donc bien prouvé que, $\boxed{\text{si } u \text{ est monotone alors } v \text{ est monotone}}$.

Exercice 15. (♡) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}$.

1) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k}$. Simplifier S_n et déduire que $S_n\sim u_n$.

Correction - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}$.

1) On pose $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ pour $x\in\mathbb{R}^*$. Pour tout $x>0$, $f(x)>0$ donc $]0,+\infty[$ est stable par f. De plsu $u_0\in]0,+\infty[$ donc la suite u est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{u_n}>0$. Donc (u_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) admet une limite

finie ou $+\infty$.
Supposons que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. Alors en passant à la limite la relation de récurrence, $l = l + \frac{1}{l}$ i.e. $\frac{1}{l} = 0$ ce qui est absurde.
Donc $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u0 \quad \text{(par téléscopage)} \quad \text{d'où} \quad \boxed{S_n = u_n + \frac{1}{u_n} - u_0}.$$

On déduit $\dfrac{S_n}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n^2} - \frac{u_0}{u_n}$. Or $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par opérations, $\dfrac{S_n}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{S_n \sim u_n}$.

Exercice 16. $(*)$ Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

1) Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$. On dressera le tableau de variations.
2) Faire un dessin pour réprésenter les termes de la suite.
3) Montrer que les intervalles $]0, 2]$ et $[2, +\infty[$ sont stables par $f \circ f$.
4) Montrer alors que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont bien définies et respectivement à valeurs dans $]0, 2]$ et $[2, +\infty[$.
5) Etudier la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Déterminer alors leur nature et leur limite.
6) Déduire alors la nature de la suite u.

Correction -

1) f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (par stricte décroissance de la fonction inverse puis multiplication par $\frac{1}{2} > 0$ et ajout de 1).
2) Graphe.
3) Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ alors $f \circ f$ est croissante sur $]0, +\infty[$.
Donc, $f \circ f(]0, 2[) =]\lim_0 f \circ f, f \circ f(2)[$ et $f \circ f(]2, +\infty[) =]f \circ f(2), \lim\limits_{+\infty} f \circ f[$.
Or $\lim_0 f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0$ donc $\lim_0 f \circ f = 0$. De même, $\lim\limits_{+\infty} f \circ f = +\infty$.
Donc $f \circ f(]0, 2[) =]0, 2[$ et $f \circ f(]2, +\infty[) =]2, +\infty[$. Donc $\boxed{]0, 2] \text{ et } [2, +\infty[\text{ sont stables par } f \circ f}$.
4) Notons que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n}) \qquad u_{2n+3} = (f \circ f)(u_{2n+1}).$$
Si on note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, cela revient à :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = g(v_n) \qquad w_{n+1} = g(w_n) \quad \text{où } g = f \circ f.$$
La stabilité des intervalles prouvée en 3) et le fait que $u_0 = 1 \in]0, 2[$ et $u_1 = 3 \in]3, +\infty[$ prouve que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n} \in]0, 2[\qquad w_n = u_{2n+1} \in]2, +\infty].$$
5) Comme g est croissante donc les suites (v_n) et (w_n) sont monotones.
Or $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = \frac{5}{3} > u_0$ donc $(v_n) = (u_{2n})$ est croissante.
Or $w_0 = u_1 = 3$ et $v_1 = u_3 = \frac{8}{5} < u_0$ donc $(v_n) = (u_{2n+1})$ est décroissante.

De plus d'après 4), (v_n) est majorée par 2 et (w_n) est minorée par 2. Donc d'après le théorème de la limite monotone (v_n) et (w_n) convergent respectivement vers un point fixe de g. Posons $l > 0$,
$$l = (f \circ f)(l) \quad \text{càd} \quad l = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{l}} \quad \text{càd} \quad l = 1 + \frac{2l}{2 + l} \quad \text{càd} \quad 2l + l^2 = 2 + 3l \quad \text{càd} \quad (l-2)(l+1) = 0 \quad \text{càd} \quad l = 2 \text{ ou } l = -1.$$
On exclut, $l = -1$, car les suites (v_n) et (w_n) sont positives donc par passage à la limite $l \geqslant 0$.
On a donc prouvé que $\boxed{(u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ convergent vers } 2}$...
6) ...et donc d'après un théorème du cours, $\boxed{u \text{ converge vers } 2}$.

Exercice 18. $(*)$

1) Soit $q \in [0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant: $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant q u_n$.
-a- Déterminer une majoration de u_n par un majorant dépendant de u_{n_0}, q et n. *On pourra commencer par le cas où $n_0 = 0$.*

-b- Montrer que (u_n) converge de limite nulle.

2) Soit $q > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant: $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant q u_n$.
Montrer que (u_n) admet pour limite $+\infty$.

3) **Application**. A l'aide de ce qui précède, montrer que la suite (v_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2^n}{n!}$ est de limite nulle.

Correction -

1) On suppose $l < 1$. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $l < q < 1$ ($q = \frac{1+l}{2}$ convient).

-a- Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ et $l < q$, alors d'après un résultat du cours: $\boxed{\text{il existe un rang } n_0 \text{ à partir duquel } \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < q}$.

-b- D'après 1)-a-, $\forall \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant q u_n$. On montre donc par récurrence [laissée au lecteur] que:

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n_0} q^{n-n_0}}.$$

Or $0 < q < 1$ donc $q^{n-n_0} = q^n q^{-n_0} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

2) On suppose $l > 1$. De manière analogue, on introuduit $q \in \mathbb{R}$, tel que $l > q > 1$ et on montrer qu' $\boxed{\text{il existe un rang } n_1 \text{ à partir duquel } \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > q}$, puis que

$$\boxed{\forall n \geqslant n_1, \quad u_n \geqslant u_{n_0} q^{n-n_1}}.$$

Or $q > 1$ donc $q^{n-n_1} = q^n q^{-n_1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par minoration, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

3) Application: soit $z \in \mathbb{C}$. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\dfrac{z^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u_n = |a_n|$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| \left|\frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc d'après 1), $u_n \to 0$ c'est-à-dire $\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$.

4) Le cas $l = 1$.
Pour l'exemple de suite qui admet pour limite 0, prendre $u_n = \dfrac{1}{n}$.
Pour l'exemple de suite qui admet pour limite 1, prendre $u_n = 1$.
Pour l'exemple de suite qui admet pour limite $+\infty$, prendre $u_n = n$.

Exercice 19. ($**$) On définit la suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.
On note $\rho = |z_0|$ et θ un argument de z_0. Montrer que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on exprimera en fonction de ρ et θ.
Indication : on pourra utiliser, après l'avoir prouvé que $\sin \dfrac{\theta}{2^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \dfrac{\theta}{2^k} = \dfrac{1}{2^n} \sin \theta$.

Correction - On cherche une expression de z_n. On calcule quelque terme pour tenter de conjecturer le terme général.
$z_0 = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ ainsi $|z_0| = \rho$ et un argument de z_0 est θ.
$z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{2} = \rho \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1}{2} = \rho \dfrac{1}{2} \times 2\cos(\dfrac{\theta}{2})\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2}} = \rho \cos(\dfrac{\theta}{2})\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2}}$ ainsi $|z_1| = \rho\cos(\frac{\theta}{2})$ et un argument de z_1 est $\frac{\theta}{2}$.
Et donc par analogie:
$z_2 = \rho\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{4})\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{4}}$....
On conjecture alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \rho\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{4})\cdots\cos(\frac{\theta}{2^n})\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2^n}} = \rho \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{\theta}{2^k})\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2^n}}.$$

La récurrence est laissée au lecteur.
Reste à simplifier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{\theta}{2^k})$. On utilise la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ avec $a = \dfrac{\theta}{2^k}$ donnant :

$\sin(\frac{\theta}{2^{k-1}}) = 2\sin(\frac{\theta}{2^k})\cos(\frac{\theta}{2^k})$, et donc $\cos(\dfrac{\theta}{2^k}) = \dfrac{\sin(\frac{\theta}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{\theta}{2^k})}$, et donc :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{\theta}{2^k}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{\theta}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{\theta}{2^k})} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{\theta}{2^{k-1}})}{\sin(\frac{\theta}{2^k})} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}.$$

Par conséquent : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, z_n = \dfrac{\rho}{2^n} \dfrac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2^n}}}$.

Puis on calcule la limite. $\frac{\theta}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\theta}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1$ et $\sin\frac{\theta}{2^n} \underset{0}{\sim} \frac{\theta}{2^n}$ donc $2^n \sin\frac{\theta}{2^n} \underset{0}{\sim} \theta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc par opérations sur les limites, $\boxed{z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\rho\sin\theta}{\theta}}$.

Exercice 21 Déterminer le terme général des suites réelles suivantes:

$$3\ (*) \begin{cases} \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n} \\ u_0 = 1,\ u_1 = 1 \end{cases}$$

Correction - On montre tout d'abord par récurrence double que la suite u est définie et à valeurs dans R_+^*.
Ce qui permet de définir : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite v vérifie la relation de récurrence double linéaire : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ et $v_0 = v_1 = 1$.
Par la méthode classique (à rédiger), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Or $u_n = \dfrac{1}{v_n}$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\sqrt{5}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}}.$$

Exercice 22. $(*)$ Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = nx + \ln(x)$. On considère l'équation:

$$(E_n) \quad nx + \ln(x) = 0.$$

1) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

Correction -

1) *Question classique: grâce au théorème de la bijection monotone, on montre que la fonction f_n réalise une bijection de* $]0,+\infty[$ *vers* $]\lim\limits_{0} f, \lim\limits_{+\infty} f[=]-\infty,+\infty[$. *Donc* 0 *admet un unique antécédent, noté* x_n *par* f_n.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= nx_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = (n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) - x_{n+1} \\ &= \underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_{=0} - \underbrace{x_{n+1}}_{>0} \end{aligned}$$
$$\boxed{f_n(x_{n+1}) < 0}$$
Donc $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$ on applique alors f_n^{-1} qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $x_{n+1} < x_n$.
Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est strictement décroissante}}$.
3) D'après 1) et 2); la suite (x_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de la bijection monotone, $\boxed{(x_n) \text{ est convergente}}$.
Notons l la limite. En passant à la limite l'inégalité: $x_n > 0$ on obtient $l \geqslant 0$.
Par l'absurde supposons que $l > 0$. On passe à la limite la relation: $nx_n + \ln(x_n) = 0$, on obtient par opérations sur les limites: $+\infty = 0$, ce qui est absurde. Donc $l = 0$. Donc $\boxed{(x_n) \text{ converge vers } 0}$.

Exercice 25. $(\heartsuit)$ Déterminer un équivalent simple des suites de terme général:

1) $u_n = 3^n - (\ln n)^4 + n^7 - 4n^3 + 1$

2) $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}}$

3) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

4) $u_n = n^2 \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$

5) $u_n = \sin \dfrac{1}{n} + \ln(1 + \dfrac{1}{n^2})$

6) $u_n = \sin \dfrac{3}{n^2} + \ln(1 + \dfrac{1}{n^2})$

7) $\dfrac{n^3 + 3n - \ln n}{n^2 + 3(\ln n)^3}(\sin \dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n})$

Correction -

1) $u_n = 3^n - (\ln n)^4 + n^7 - 4n^3 + 1 \underset{+\infty}{\sim} 3^n$ (les autres termes sont négligeables devant 3^n).

2) $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n$ (on a utilisé les équivalents usuel $\sin u \underset{0}{\sim} u$ et $\tan u \underset{0}{\sim} u$ et le fait que $\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$ car $\mathrm{e}^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ et $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

4) $u_n = n^2 \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) = n^2 \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) n^2 \times (-\dfrac{1}{n+2}) \underset{+\infty}{\sim} -n$

5) $u_n = \sin \dfrac{1}{n} + \ln(1 + \dfrac{1}{n^2}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\sin \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\ln(1 + \frac{1}{n^2}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2} = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

6) $u_n = \sin \dfrac{3}{n^2} + \ln(1 + \dfrac{1}{n^2}) = \dfrac{3}{n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2}) + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2}) = \dfrac{4}{n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2}$.

7) $u_n = \dfrac{n^3 + 3n - \ln n}{n^2 + 3(\ln n)^3}(\sin \dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{n^2}\mathrm{e}^{-n} = n\,\mathrm{e}^{-n}$. On a utilisé que $\sin \dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}$ (l'autre terme équivalent à $\frac{1}{n}$ est négligeable devant e^{-n}).

Exercice 26. $(**)$ Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ est équivalent à $n!$. Puis déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{n!}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!\right) - 1$.

Correction - Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-2} k! + (n-1)! + n! \quad \text{donc} \quad \frac{u_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1.$$

On encadre la somme. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$, alors $0 \leqslant k! \leqslant (n-2)!$ donc $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

On somme, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \to 0.$$

Par théorème des gendarmes, il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par opérations $\dfrac{u_n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} n!}$.

Puis,

$$\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} k!\right) - 1 = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} k! - n!\right) = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k!\right) = \frac{u_{n-1}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Exercice 27. $(*)$ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) **différente de** 1 et que $u_n \sim v_n$.

1) Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.

2) Montrer que le résultat n'est plus vraie si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut 1.

Correction - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) **différente de** 1 et que $u_n \sim v_n$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = \frac{\ln v_n + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln v_n} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln v_n}.$$

Or $u_n \sim v_n$ donc $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puis v_n admet la même limite que u_n car $u_n \sim v_n$ (différente de 1), donc $\ln v_n$ admet pour limite $-\infty$, $l \in \mathbb{R}_*$ où $+\infty$, dans tous les cas par opérations sur les limites, $\frac{\ln u_n}{\ln v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\boxed{\ln u_n \sim \ln v_n}$.

2) Posons $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ et $v_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}}$, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \sim v_n$. Or $\ln u_n = \frac{1}{n}$ et $\ln v_n = \frac{2}{n}$ donc $\boxed{\ln u_n \text{ n'est pas équivalent à } \ln v_n}$