Avant de commencer un exercice abstrait sur les ensembles et applications, êtes-vous bien au point sur les méthodes suivantes?
En général, on applique les "recettes suivantes"

- Comment démarre-t-on un raisonnement prouvsant une phrase commençant par : $\boxed{\forall} x \in A, ...$?
  On commence par "Soit $x \in A$" ou "prenons $x \in A$"
- Comment prouve-t-on une implication $P \Rightarrow Q$?
  On commence par "Supposons P, montrons Q"..
- Comment prouve-t-on une équivalence $P \Leftrightarrow Q$?
  Ou bien par double implication. Ou bien en raisonnant par équivalence.
- Comment prouve-t-on une inclusion $A \subset B$?
  On commence par "soit $x \in A$" et on finit par "$x \in B$".
- Comment prouve-t-on un une égalité d'ensemble $A = B$?
  Ou bien par double inclusion et on est ramené au cas ci-dessus.
  Ou bien en raisonnant par équivalence : $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Exercice 2. ($\heartsuit$) Soit E un ensemble non vide et A, B des parties de E. Montrer que

$$A = B \text{ si et seulement si } A \cap B = A \cup B.$$

Correction -

$\Rightarrow$) Supposons $A = B$. Montrons que $A \cap B = A \cup B$.
Dans ce cas c'est très simple, car $A = B$, $A \cap A = A = A \cup A$.
D'où l'implication voulue.

$\Leftarrow$) Supposons $A \cap B = A \cup B$. Montrons que $A = B$.

- $\subset$) Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$, donc $x \in B$.
- $\supset$) Comme A et B jouent le même rôle, on a la deuxième inclusion.

D'où l'égalité voulue, d'où l'implication voulue.

On a donc bien l'équivalence : $\boxed{A = B \text{ si et seulement si } A \cap B = A \cup B.}$.

Exercice 9. ($*$) Soit E un ensemble. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que:

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Correction - On suppose que $f \circ f \circ f = f$.
$\Rightarrow$): supposons f injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in E$, on veut montrer l'existence d'un antécédent de y.
Par hypothèse

$$f(y) = (f \circ f \circ f)(y) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(y) = f((f \circ f)(y)).$$

Par injectivité de f, il vient

$$y = (f \circ f)(y) = f(f(y)).$$

$f(y)$ est donc un antécédent de y. L'application f est donc surjective.
$\Leftarrow$): supposons f surjective. Montrons que f est injective. Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$, montrons alors que $x = x'$.
Comme f est surjective, posons u et u' dans E tels que $x = f(u)$ et $x' = f(u')$.
On a donc en appliquant f, $f(f(u)) = f(f(u'))$ et en réappliquant f il vient $f(f(f(u))) = f(f(f(u')))$ i.e. $(f \circ f \circ f)(u) = (f \circ f \circ f)(u')$ et donc par hypothèse, comme $f \circ f \circ f = f$ il vient $f(u) = f(u')$ i.e. $x = x'$. L'application f est donc injective.

On a donc bien:

$$\boxed{f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective}}.$$

Exercice 10. ($**$)Théorème de Cantor Soit E un ensemble. Démontrer qu'il n'existe pas de surjection de E vers $\mathcal{P}(E)$.
Raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble $A = \{x \in E \,/\, x \notin f(x)\}$.

Correction - Par l'absurde supposons qu'il existe une telle surjection, $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Posons $A = \{x \in E \,/\, x \notin f(x)\}$. Alors $A \in \mathcal{P}(E)$, donc, comme f est surjective, posons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = A$.
Si $x_0 \in A$, comme $A = f(x_0)$ alors $x_0 \in f(x_0)$ donc par définition de A, $x_0 \notin A$, ce qui contredit l'hyptohèse initiale.
Si $x_0 \notin A$, alors $x_0 \notin f(x_0)$ donc par définition de A, $x_0 \in A$, ce qui contredit l'hyptohèse initiale.

Exercice 13 Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. On considère A, A' deux parties de E et B, B' deux parties de F.

1) Montrer que $\overleftarrow{f}(B \cap B') = \overleftarrow{f}(B) \cap \overleftarrow{f}(B')$.

2) -a- Montrer que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

-b- Montrer que l'on n'a pas égalité en général.

-c- Montrer qu'il y égalité si f est injective.

Correction - Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. On considère A et B deux parties de E.

1) Pour montrer l'égalité, on va raisonner par équivalence. Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \overleftarrow{f}(B \cap B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \quad \text{(définition de l'image réciproque)} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B' \quad \text{(définition de l'intersection)} \\ &\Leftrightarrow x \in \overleftarrow{f}(B) \text{ et } x \in \overleftarrow{f}(B') \quad \text{(définition de l'image réciproque)} \\ &\Leftrightarrow x \in \overleftarrow{f}(B) \cap \overleftarrow{f}(B'). \end{aligned}$$

On a donc bien: $\boxed{\overleftarrow{f}(B \cap B') = \overleftarrow{f}(B) \cap \overleftarrow{f}(B')}$.

2) -a- Montrons que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
Soit $y \in f(A \cap A')$ posons alors $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$.
Comme $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ et comme $x \in A'$, $f(x) \in f(A')$. D'où $y = f(x) \in f(A) \cap f(A')$.
On a donc bien: $\boxed{f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')}$.

-b- Posons $f: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $A = [-1,0]$ et $A' = [0,1]$.
Alors $f(A) = f(A') = [0,1]$. Puis $A \cap A' = \{0\}$ d'où $f(A \cap A') = \{0\}$. On a donc $\boxed{f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')}$.

-c- Supposons f injective. Montrons alors $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$.
Soit $y \in f(A) \cap f(A')$. Alors $y \in f(A)$ donc posons $a \in A$ tel que $y = f(a)$; puis $y \in f(A')$, donc posons $a' \in A'$ tel que $y = f(a')$.
Finalement, $y = f(a) = f(a')$. Donc par injectivité de f, $a = a'$. Donc a et a' appartiennent tous les deux à $A \cap A'$. Finalement $y = f(a) \in f(A \cap A')$.
D'où $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$.
L'inclusion de 1) donne alors l'égalité $\boxed{f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')}$.

Exercice 14. $(*)$ Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.
Montrer que: f injective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = \overleftarrow{f}(f(A))$.

Correction - Soit E et F deux ensembles et $f \in F^E$. Pour montrer l'équivalence on raisonne par double-implication.

$\Rightarrow)$: supposons f injective. Montrons: $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overleftarrow{f}(f(A)) = A$.
Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, montrons $\overleftarrow{f}(f(A)) = A$. Par double inclusion.

$\supset)$: Soit $x \in A$, alors, par définition de $f(A)$, $f(x) \in f(A)$. Et donc, par définition de l'image réciproque cela signifie que $x \in \overleftarrow{f}(f(A))$. D'où l'inclusion voulue $A \subset \overleftarrow{f}(f(A))$.

$\subset)$: Soit $x \in \overleftarrow{f}(f(A))$ alors par définition de l'image réciproque, $f(x) \in f(A)$. Donc par définition de $f(A)$, posons $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Or f est injective, donc $x = a$, or $a \in A$ donc $x \in A$. On a donc l'inclusion $\overleftarrow{f}(f(A)) \subset A$.

D'où l'égalité voulue $\overleftarrow{f}(f(A)) = A$.

$\Leftarrow)$: supposons, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $\overleftarrow{f}(f(A)) = A$. Montrons que f est injective.
Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Montronsque $x = x'$.
On applique l'hypothèse à $A = \{x\}$,

$$\begin{aligned} \{x\} &= \overleftarrow{f}(f(\{x\})) \\ &= \overleftarrow{f}(\{f(x)\}) \quad \text{car } f(\{x\}) = \{f(x)\} \\ &= \overleftarrow{f}(\{f(x')\}) \quad \text{car } f(x) = f(x') \\ \{x\} &= \{x'\} \quad \text{par hypothèse avec } A = \{x'\}. \end{aligned}$$

Donc $x = x'$. Donc f est injective.

On a donc montré:

$$\boxed{f \text{ injective} \Leftrightarrow \left[\forall A \in \mathcal{P}(E),\quad \overleftarrow{f}(f(A)) = A\right]}.$$