

### XI. Limites-Continuité

- Notion de voisinage. Propriétés vraies au voisinage d'un point.
- Maximum, minimum, borne supérieure, inférieure d'une fonction.
- Limite (finie ou infinie) d'une fonction en  $a \in \overline{I}$  ou  $a = \pm\infty$ . Opérations sur les limites dont la composition. Limites et inégalités.
- Caractérisation séquentielle de la limite. Application à la non-existence de limite.
- Théorème de la limite monotone.
- Continuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité. Prolongement par continuité.
- Continuité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues.
- Négligeabilité, équivalence. Utilisation des équivalents pour le calcul de limites.
- Applications continues. Grands théorèmes de la continuité: valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une application continue, image d'un segment par une application continue, bijection monotone.

### Questions de cours (preuve à connaître)

- Théorème de l'image d'un segment par une fonction continue.
- Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.
- Une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas sur un intervalle garde un signe constant.
- Une fonction continue sur  $[0, +\infty[$  ayant une limite finie en  $+\infty$  est bornée. Deux méthodes.
- DS4. Soit  $n \geq 3$ . Montrer que l'équation  $x^n = e^x$  admet exactement deux solutions positives  $u_n < v_n$  vérifiant  $1 < u_n \leq n \leq v_n$ .
- DS4. Soit  $g : F \rightarrow E$  une application injective. Montrer que pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $g(F \setminus B) = g(F) \setminus g(B)$ .
- DS4. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Montrer que l'application  $A \in \mathcal{P}(E) \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(F)$  est croissante pour l'inclusion.

Cahier de colles : groupes 5,6,7,8.