Exercice 1

1) Déterminer un équivalent de $f(x) = \dfrac{\sin^3 x - \tan^3 x}{x^4}$ en 0.

2) Déterminer un équivalent de $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)$ en 0.

3) Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan(\frac{\pi x}{4})}$ en 1.

Problème

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient:

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \\ f \text{ s'annule au moins une fois sur } \mathbb{R}, \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \end{cases}$$

Le but du problème est de déterminer les éléments de $\mathcal{E}$.

1) -a- Montrer que la fonction nulle est dans $\mathcal{E}$.
 -b- Montrer que la fonction cosinus est dans $\mathcal{E}$.
 -c- Si f est dans $\mathcal{E}$ et si $\omega \in \mathbb{R}^*$, montrer que la fonction $f_\omega : x \mapsto f(\omega x)$ est dans $\mathcal{E}$.

2) On considère une fonction $f \in \mathcal{E}$. En donnant x et à y des valeurs particulières, prouver que :
 -a- $f(0)$ vaut 0 ou 1.
 -b- Si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle.
 -c- Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.
 -d- Si $f(0) = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 - 1$.
 -e- Si f s'annule en $a \in \mathbb{R}^*$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2a - x) = -f(x)$. En déduire que f est $4a-$périodique.

Dans la suite, f est un élément de $\mathcal{E}$ avec $f(0) = 1$.

3) -a- Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
 -b- Soit $A = \{x > 0 | f(x) = 0\}$, montrer que A admet une borne inférieure.

On pose dans la suite du problème, $a = \inf(A)$.

 -c- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in A$ tel que $a \leqslant t_n < a + \frac{1}{n}$. Prouver alors que $f(a) = 0$. En déduire que $a > 0$.
 -d- Montrer que $\forall x \in [0, a[,\ f(x) > 0$.

Dans la suite, on pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\omega x)$ avec $\omega = \frac{\pi}{2a}$.

4) -a- Soit $q \in \mathbb{N}$, montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = 2\left[f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 - 1$. En déduire que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$.
 -b- Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$ (récurrence sur p).
 -c- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la suite u définie par $u_q = \dfrac{a\left\lfloor 2^q \frac{x}{a} \right\rfloor}{2^q}$ converge vers x et que $f(u_q) = g(u_q)$.
 -d- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$.

5) Déterminer $\mathcal{E}$.