Exercice 1. Suite implicite Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution notée x_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

2) Calculer x_1, x_2.

3) Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]0, 1[$.

4) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le signe, pour tout réel $x \in]0, 1[$, de la quantité $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

   -b- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de $f_n(x_{n+1})$, puis la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   -c- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note l sa limite.

5) -a- Montrer rigoureusement que la limite de $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est nulle.

   -b- Donner la valeur de l.

6) On pose $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = l - x_n \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

   -a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{6} x_n^n$.

   -b- Montrer que la suite (S_n) converge et montrer que la limite appartient à $[0, \frac{1}{3}]$.