Problème

Partie I - Etude de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{donc par intégration, bornes croissantes, sur } [k, k+1] \quad \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{(k+1)-k}{k+1}} \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{=[\ln x]_k^{k+1}} \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{(k+1)-k}{k}}.$$

Ce qui donne finalement : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}}$.

Par conséquent : $\boxed{\forall k \in \geqslant 2, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)}$.

2) Soit $n \geqslant 2$, on somme l'encadrement précédent pour $k \in [\![2, n]\!]$, et on reconnait deux sommes téléscopiques :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant H_n - 1 \leqslant \ln(n) - \ln(1).$$

Donc,

$$\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(2) + 1 \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

Comme $\ln(n) \to +\infty$ alors $\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(2) + 1 = \mathrm{o}(\ln n)$ et $1 = \mathrm{o}(\ln n)$, donc

$$\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(2) + 1 \sim \ln(n) \qquad \ln(n) + 1 \sim \ln n.$$

Donc par théorème des gendarmes, version équivalents, $\boxed{H_n \sim \ln n}$. Il découle $\boxed{H_n \to +\infty}$.

3) **Monotonie de** (a_n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leqslant 0 \quad \text{(1ère inégalité de 1) avec } n \text{ au lieu de } k).$$

Donc $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante}}$

Positivité de (a_n) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'inégalité $H_n \geqslant \ln(n+1) + 1 - \ln(2)$ établie en 2),

$$a_n = H_n - \ln n \geqslant \ln(n+1) + 1 - \ln 2 - \ln n = \ln(1 + \frac{1}{n}) + 1 - \ln(2) \geqslant 0 \qquad \text{car } 1 + \frac{1}{n} > 1.$$

Donc $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante et positive}}$.

Donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(a_n) \text{ converge, on note } \gamma \text{ sa limite}}$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

-a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} H_{2n} - H_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \quad \text{(changement d'indice } k = n+j\text{)} \\ &\boxed{H_{2n} - H_n = b_n}. \end{aligned}$$

-b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n &= (a_{2n} + \ln(2n)) - (a_n + \ln(n)) \quad \text{(d'après I-3, et par définition de } a_n\text{)} \\ &= a_{2n} - a_n + \ln 2 + \ln n - \ln n \end{aligned}$$

Or d'après I-3), (a_n) converge vers une limite notée l, d'où (a_{2n}) converge vers l et donc finalement $\boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = \ln 2}$.

Partie II - Etude d'une suite récurrente

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{1-x^2}{(1+x)^4} = \frac{1-x}{(1+x)^3}.$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f' & & + & 0 & - & \\ \hline f & 0 & \nearrow & \frac{1}{4} & \searrow & 0 \end{array}$$

D'où les variations de f. Notons que $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

L'étude de f livre, $f([0,1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0,1]$ donc $[0,1]$ est stable par f.
Or $u_0 = 1 \in [0,1]$, donc la suite u est définie et à valeurs dans $[0,1]$.
Puis, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) - x = \frac{x}{(1+x)^2} - x = x\left(\frac{1}{(1+u_n)^2} - 1\right) = x\frac{-2x - x^2}{(1+x)^2} = x^2 \frac{-2-x}{(1+x)^2} \leqslant 0.$$

Donc $\boxed{u \text{ est décroissante}}$; de plus u est minorée par 0 donc u convergente d'après le théorème de la limite monotone.
L'unique point fixe de $[0,1]$ est 0 ($f(x) - x = 0$ si et seulement si $x = 0$ car $x \in [0,1]$).
Finalement $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

2) -a- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\frac{1}{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^2} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}} = \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\leqslant 1} \frac{1}{n+2}.$$

Par récurrence, posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$:"$u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ "
Initialisation. $u_0 = 1 \geqslant 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$ est vraie. D'après les variations de f, f est croissante sur $[0,1]$ de plus u_n et $\frac{1}{n+1}$ appartiennent à $[0,1]$, d'où $f(u_n) \leqslant f(\frac{1}{n+1})$. L'inégalité qui précède $f(u_n) \leqslant \frac{1}{n+2}$. C'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$.

-b- Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} = \frac{(1+u_{k-1})^2}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_{k-1}} = \frac{1+2u_{k-1}+u_{k-1}^2}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_{k-1}}$$
$$\boxed{\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} = 2 + u_{k-1}}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, de plus avec l'inégalité de II-2)-a-, il vient:

$$0 \leqslant u_{k-1} \leqslant \frac{1}{k} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 2 \leqslant \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} \leqslant 2 + \frac{1}{k}}.$$

-c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![1, n]\!]$. D'après II-2)-b-, $2 \leqslant \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} \leqslant 2 + \frac{1}{k}$. On somme cet encadrement pour $k \in [\![1, n]\!]$, il vient

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2}_{=2n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}(2 + \frac{1}{k}) = 2n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or, par téléscopage: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \frac{1}{u_n} - 1.$

On a donc bien: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n+1 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2n+1+H_n}$.

3) D'après I-2), $H_n \sim \ln n$ donc $2n+1+H_n \sim 2n$. Et $2n+1 \sim 2n$, par théorème des gendarmes versions équivalents, $\frac{1}{u_n} \sim 2n$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n}}$.