Exercice 1 $\forall x\in\mathbb{R},\quad f''(x)+f(-x)=x+\cos x\quad (E)$.

NB: il faut rédiger correctement les résolutions d'équations différentielles, comme dans le cours, comme dans ce corrigé. Ne pas confondre fonction et expression notamment.

1) Résolution de (E_1) : $y''-y=x$.

- L'équation caractéristique est: $r^2-1=0\Leftrightarrow r=\pm1$.
  D'où la solution générale de l'équation homogène: $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^x+\mu\,\mathrm{e}^{-x}$ où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
- On remarque que $x\mapsto -x$ est solution particulière de (E_1).
- D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E_1),\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\lambda\,\mathrm{e}^x+\mu\,\mathrm{e}^{-x}-x\end{array}\ /\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}}$.

2) Résolution de (E_2) : $y''+y=\cos(x)$.

- L'équation caractéristique est: $r^2+1=0\Leftrightarrow r=\pm\,\mathrm{i}$.
  D'où la solution générale de l'équation homogène: $x\mapsto\lambda\cos x+\mu\sin x$ où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
- On a $\cos x=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})$. On pose (E_3) : $y''+y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. i est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de (E_3) sous la forme $z_p : x\mapsto ax\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ où $a\in\mathbb{C}$. Alors $\begin{cases}z_p(x)=ax\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\\ z_p'(x)=(\mathrm{i}\,ax+a)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\\ z_p''(x)=(-ax+2\,\mathrm{i}\,a)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\end{cases}$, donc

  $$z_p \text{ est solution de } (E_3)\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad z_p''(x)+z_p(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\quad 2\,\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\Leftrightarrow 2\,\mathrm{i}\,a=1\Leftrightarrow a=-\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

  D'où $z_p : x\mapsto-\frac{\mathrm{i}\,x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$, on pose $y_p=\mathrm{Re}\,(z_p)$,

  $$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_p(x)=\mathrm{Re}\left(-\frac{\mathrm{i}\,x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)=\mathrm{Re}\left(-\frac{\mathrm{i}\,x}{2}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)\right)=\frac{x\sin x}{2}.$$

- D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E_2),\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\lambda\cos x+\mu\sin x+\frac{x\sin x}{2}\end{array}\ /\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}}$.

3) **Analyse**. Soit f une solution de (E). On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\qquad\text{et}\qquad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

-a- $x\mapsto -x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x\mapsto f(-x)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par combinaison linéaire, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$g'(x)=\frac{f'(x)-f'(-x)}{2}\qquad\qquad g''(x)=\frac{f''(x)+f''(-x)}{2}.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme f est solution de (E):

$$f''(x)+f(-x)=x+\cos x\qquad\text{et}\qquad f''(-x)+f(x)=-x+\cos(-x)=-x+\cos x.\quad (*)$$

Donc

$$g''(x)+g(x)=\frac{f''(x)+f(-x)}{2}+\frac{f''(-x)+f(x)}{2}=\frac{1}{2}\left((x+\cos x)+(-x+\cos x)\right)=\cos x.$$

Finalement $\boxed{g \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E_2)\text{: } y''+y=\cos x}$.

$\boxed{\text{Posons alors } (\lambda_1,\mu_1)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que pour tout } x\in\mathbb{R},\ g(x)=\lambda_1\cos x+\mu_1\sin x+\frac{x\sin x}{2}}$.

NB: il ne fallait pas oublier de prouver que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

-b- Comme pour g, h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad h''(x) = \dfrac{f''(x) - f''(-x)}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, en réutilisant $(*)$ de 3)-a-,

$$h''(x) - h(x) = \frac{f''(x) + f(-x)}{2} - \frac{f''(-x) + f''(x)}{2} = \frac{1}{2}\left((x + \cos x) - (-x + \cos x)\right) = x.$$

Finalement $\boxed{h \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E_1)\text{: } y'' - y = x}$

$\boxed{\text{Posons alors } (\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda_2 \mathrm{e}^x + \mu_2 \mathrm{e}^{-x} - x}$.

-c- Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$.
Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \dfrac{x \sin x}{2} + \lambda_2 \mathrm{e}^x + \mu_2 \mathrm{e}^{-x} - x}$.

4) **Synthèse**. On détermine parmi les f précédents celles qui sont effectivement solutions de (E). Soit $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ et $f : x \mapsto \lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \dfrac{x \sin x}{2} + \lambda_2 \mathrm{e}^x + \mu_2 \mathrm{e}^{-x} - x$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -\lambda_1 \cos x - \mu_1 \sin x + \cos x - \frac{x \sin x}{2} + \lambda_2 \mathrm{e}^x + \mu_2 \mathrm{e}^{-x}$$

$$f(-x) = \lambda_1 \cos(-x) + \mu_1 \sin(-x) + \frac{-x \sin(-x)}{2} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-x} + \mu_2 \mathrm{e}^x + x = \lambda_1 \cos x - \mu_1 \sin x + \frac{x \sin x}{2} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-x} + \mu_2 \mathrm{e}^x + x.$$

D'où:

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x \cos x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\mu_1 \sin x + \lambda_2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \mu_2(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x) + x + \cos x = x + \cos x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\mu_1 \sin x + 2(\lambda_2 + \mu_2) \operatorname{ch} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\mu_1 = 0 \\ \lambda_2 + \mu_2 = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

En effet pour l'implication $\Rightarrow$, on prend des valeurs particulières de x. Pour $x = 0$, il vient $2(\lambda_2 + \mu_2) \operatorname{ch} 0 = 0$ c'est-à-dire $\lambda_2 + \mu_2 = 0$. Puis avec $x = \frac{\pi}{2}$, il vient $\mu_1 = 0$. Puis, l'implication $\Leftarrow$ est triviale.

NB: cette dernière équivalence a été le plus souvent saboté, en particulier l'implication $\Rightarrow$. **Conclusion**.

$$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E), \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \underbrace{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}_{=2 \operatorname{sh} x} - x + \dfrac{x \sin x}{2} \end{array} \Big/ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

Exercice 2

1) Soit $\varepsilon > 0$ (fixé dans toute la question 1)).

-a- Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, par définition de la limite, $\boxed{\text{il existe } N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que: } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}}$.

-b- Comme N_0 est fixé, $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|$ est un réel fixé qui ne dépend pas de n. Or $\dfrac{1}{n} \to 0$, donc $\dfrac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow \left| \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{N_0}|}{n} - 0 \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $\dfrac{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_{N_0}|}{n} \geqslant 0$ donc:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow \dfrac{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_{N_0}|}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}}.$$

-c- On pose $N = \max(N_0, N_1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant N$, alors

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right| \leqslant \dfrac{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|}{n} \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= \dfrac{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_{N_0}|}{n} + \dfrac{|u_{N_0+1}|+\cdots+|u_n|}{n} \end{aligned}$$

Or d'après 1)-b-, $\dfrac{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_{N_0}|}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ car $n \geqslant N \geqslant N_1$.
Puis, d'après 1)-a-, pour $k \geqslant N_0$, $|u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$\begin{aligned} \dfrac{|u_{N_0+1}|+\cdots+|u_n|}{n} &\leqslant \underbrace{\dfrac{n-N_0}{n}}_{\leqslant 1}\dfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{(car il y a } n-N_0 \text{ termes dans la somme)} \\ &\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Au final: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow |a_n| \leqslant \varepsilon$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$.

2) **On utilise le résultat précèdemmet démontré, c'est-à-dire qu'on ne refait pas une démonstration utilisant les** ε.
Supposons $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l$ et $b_n = \dfrac{v_1+\cdots+v_n}{n}$. On applique 1), $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Or pour $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \dfrac{(u_1-l)+\cdots+(u_n-l)}{n} = \dfrac{u_1+\cdots+u_n-nl}{n} = \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n} - \dfrac{nl}{n} = a_n - l.$$

Comme $b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l}$.

3) La suite $(v_{n+1}-v_n)$ converge vers l, donc $(v_n - v_{n-1})$ converge vers l. Donc d'après le théorème de Cesaro, la moyenne arithmétique des n premiers termes $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1})$ admet pour limite l. Or, par téléscopage,

$$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) = \dfrac{1}{n}(v_n - v_0).$$

Puis:

$$\dfrac{v_n}{n} = \underbrace{\dfrac{1}{n}(v_n - v_0)}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l} + \underbrace{\dfrac{v_0}{n}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Finalement, $\boxed{\left(\dfrac{v_n}{n}\right) \text{ converge vers } l}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[n]{w_n} = w_n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(w_n)} \ : \ (*).$$

Or par hypothèse, $\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)$ converge vers l. Donc par composition de la limite de $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ par ln (continue sur $\mathbb{R}_+^*$), $(\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n))$ converge vers $\ln(l)$ ($l > 0$) donc d'après 3), avec $v_n = \ln(w_n)$, $\left(\dfrac{\ln(w_n)}{n}\right)$ converge vers $\ln(l)$. Donc d'après $(*)$ et par composition de la limite par exponentielle (continue sur $\mathbb{R}$),

$\boxed{(\sqrt[n]{w_n}) \text{ converge vers } \mathrm{e}^{\ln(l)} = l}$.

5) -a- On applique 4), avec $w_n = n$. Ici $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc $\boxed{\sqrt[n]{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

-b- On applique 4), avec $w_n = \binom{2n}{n}$. Ici, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n}{n} = 4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Donc $\boxed{\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4}$.

-c- On pose $v_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

Puis, on applique 4) avec $w_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Ici, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Or

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}.$$

Or $\dfrac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to0}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où, par composition de la limite par exponentielle (exp est continue sur $\mathbb{R}$), $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

Finalement $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Par conséquent, $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}}$.