Exercice 1

1) Pour x au voisinage de 0,

$$\sin^3 x - \tan^3 x = \sin^3 - \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin^3 x(\cos^3 x - 1)}{\cos^3 x}.$$

Or $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $\sin^3 x \underset{0}{\sim} x^3$.
Puis, $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1$ donc $\cos^3 x \underset{0}{\sim} 1$.
Enfin, $\cos^3 x - 1 = (\cos x - 1)(\cos^2 + \cos x + 1)$ avec $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $\cos^2 + \cos x + 1 \underset{0}{\sim} 3$ (car a pour limite 3).
Finalement,

$$\sin^3 x - \tan^3 x \underset{0}{\sim} \frac{x^3 \times (-\frac{x^2}{2}) \times 3}{1} = -\frac{3}{2}x^5. \qquad \text{Et donc, } \boxed{\frac{\sin^3 - \tan^3 x}{x^4} \underset{0}{\sim} -\frac{x}{5}.}$$

2) Comme $\dfrac{\pi}{x^2+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \pi$ et que l'on souhaite se ramener à un équivalent de tan en 0, on exploite la π-périodicité de tan. Pour x au voisinage de 0,

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x^2+1} - \pi\right) = \tan\left(\frac{-\pi x^2}{x^2+1}\right) \underset{0}{\sim} \frac{-\pi x^2}{x^2+1} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \frac{-\pi x^2}{x^2+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \\ \tan u \underset{0}{\sim} u \end{cases}.$$

Enfin, $x^2 + 1 \underset{0}{\sim} 1$, donc $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right) \underset{0}{\sim} -\pi x^2}$.

3) On a bien une FI. On pose $h = x - 1$, $f(1+h) = \dfrac{\sqrt{4+h} - \sqrt[3]{8+3h}}{1 - \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h)}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{4+h} - \sqrt[3]{8+3h} &= 2\left(\sqrt{1+\tfrac{h}{4}} - \sqrt[3]{1+\tfrac{3h}{8}}\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} 2\left(1 + \tfrac{h}{2\times 4} + \circ(h) - (1 + \tfrac{3h}{3\times 8} + \circ(h))\right) \underset{h\to 0}{=} \circ(h) \end{aligned}$$

$$1 - \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h) = 1 - \frac{1 + \tan(\frac{\pi}{4}h)}{1 - \tan(\frac{\pi}{4}h)} = \frac{-2\tan(\frac{\pi}{4}h)}{1 - \tan(\frac{\pi}{4}h)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-2\frac{\pi}{4}h}{1} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-\pi h}{2}$$

On peut conclure $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = 0.}$

Problème 1

1) -a- La fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}$, s'annule au moins une fois et vérifie évidemment la troisième condition, donc $\boxed{0 \in \mathcal{E}.}$

-b- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ donc le cosinus s'annule au moins une fois.
$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y-(x-y)}{2}\right) = 2\cos(x)\cos(y)$$

donc $\boxed{\cos \in \mathcal{E}.}$

-c- Si $f \in \mathcal{E}$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction f_ω est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues.
Si f s'annule en $a \in \mathbb{R}$ alors f_ω s'annule en $\frac{a}{\omega}$.
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$f_\omega(x+y) + f_\omega(x-y) = f(\omega x + \omega y) + f(\omega x - \omega y) = 2f(\omega x)f(\omega y) = 2f_\omega(x)f_\omega(y)$.
Ainsi $\boxed{f_\omega \in \mathcal{E}.}$

2) -a- Prenons $x = y = 0$, alors on a $2f(0) = 2\left(f(0)\right)^2$ et donc $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1.}$

-b- Si $f(0) = 0$ alors avec $y = 0$ et x **quelconque**, on a $2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ et donc $f(x) = 0$.
$\boxed{f \text{ est identiquement nulle.}}$

-c- Si $f(0) = 1$ alors en prenant $x = 0$ et y **quelconque**, on a $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$ d'où $f(-y) = f(y)$, donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

-d- Si $f(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en prenant $\frac{x}{2}$ à la place de x et de y, on a :
$f(x) - f(0) = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ et donc $\boxed{f(x) = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 - 1.}$

-e- Si f s'annule en $a \in \mathbb{R}^*$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(a+[a-x]) + f(a-[a-x]) = 2f(a)f(a-x)$ or $f(a) = 0$ donc $f(2a-x) + f(x) = 0$, d'où $\boxed{f(2a-x) = -f(x).}$
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(4a+x) = f(2a - [-2a-x]) = -f(-2a-x) = -f(2a+x)$ car f est paire or $f(2a+x) = -f(-x) = -f(x)$, donc $f(4a+x) = f(x)$ $\boxed{f \text{ est } 4a\text{−périodique.}}$

3) -a- On sait que f s'annule en un certain réel α, mais $f(0) = 1$ donc $\alpha \neq 0$, comme f est paire on a $f(|\alpha|) = f(\alpha) = 0$ avec $|\alpha| > 0$ donc $\boxed{f \text{ s'annule au moins une fois sur } \mathbb{R}_+^*.}$

-b- L'ensemble A est non vide d'après la question précédente, cet ensemble est minoré par 0, donc d'après la propriété de la borne inférieure $\boxed{A \text{ admet une borne inférieure.}}$

-c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a = \inf(A)$, le réel $a + \frac{1}{n}$ ne minore pas A donc il existe un élément t_n de A tel que $t_n < a + \frac{1}{n}$.
Puisque a minore A, on a bien $a \leqslant t_n < a + \frac{1}{n}$.
D'après le théorème d'encadrement , la suite (t_n) converge vers a, comme f est continue en a, on a $\lim_{n\to+\infty} f(t_n) = f(a)$.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \in A$, donc $f(t_n) = 0$ par conséquent $\lim_{n\to+\infty} f(t_n) = 0$.
Par unicité de la limite, $\boxed{f(a) = 0}$.
A étant minoré par 0, $a \geqslant 0$ et puisque $f(0) \neq 0$ on a $a \neq 0$. On en déduit $\boxed{a > 0.}$

-d- Soit $x \in]0, a[$, par définition de a, $f(x) \neq 0$.
Si $f(x) < 0$ puisque $f(0) = 1$ le thoérème des valeurs intermédiaires (son corollaire) appliqué à f continue sur l'intervalle $[0, x]$ fournit l'existence d'un élément $c \in [0, x]$ tel que $f(c) = 0$.
On obtient $0 < c < x < a$ et $f(c) = 0$. C'est absurde par définition de a donc $f(x) > 0$.

$$\boxed{\forall x \in [0, a[,\ f(x) > 0.}$$

4) -a- Soit $q \in \mathbb{N}$, d'après le 2.d, $\boxed{f\left(\frac{a}{2^q}\right) = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 - 1}$ $(*)$

Récurrence sur q.
Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(q)$: $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
<u>Initialisation:</u> $f(a) = 0 = g(a)$ car $g(a) = \cos\left(\frac{\pi a}{2a}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
<u>Hérédité:</u> Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(q)$ est vérifiée.
$\frac{a}{2^{q+1}} \in [0, a[$ donc d'après 3.d, $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$.
On déduit alors de $(*)$, $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = \sqrt{\frac{1+f\left(\frac{a}{2^q}\right)}{2}}$.

D'après $\mathcal{P}(q)$,

$$f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = \sqrt{\frac{1+g\left(\frac{a}{2^q}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{a}{2^{q+2}}\right)} = \cos\left(\frac{a}{2^{q+2}}\right)$$

car $\frac{a}{2^{q+2}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On obtient ainsi $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = \cos\left(\frac{a}{2^{q+2}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$.

$\mathcal{P}(q+1)$ est vérifiée ce qui achève la récurrence.

-b- Soit $q \in \mathbb{N}$.

Récurrence à deux prédécesseurs sur $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(p)$: $f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$.

Initialisation: $f(0) = 0 = g(0)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

D'après 4.a, $\mathcal{P}(1)$ est également vérifiée.

Hérédité: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(p-1)$ et $\mathcal{P}(p)$ sont vérifiées.

$$f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = f\left(\frac{pa}{2^q} + \frac{a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)$$

D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a

$$f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = 2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)$$

D'après 1.b et 1.c, $g \in \mathcal{E}$ donc $2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = g\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right)$.

par conséquent, $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = g\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right)$

$\mathcal{P}(q+1)$ est vérifiée ce qui achève la récurrence.

-c- Soit $x \in \mathbb{R}$, $2^q\frac{x}{a} - 1 < \left\lfloor 2^q\frac{x}{a}\right\rfloor \leqslant 2^q\frac{x}{a}$. Puisque $\frac{a}{2^q} > 0$, on a $x - \frac{a}{2^q} < u_q \leqslant x$.

D'après le théorème d'encadrement, (u_q) converge vers x.

Posons $p = \left|\left\lfloor 2^q\frac{x}{a}\right\rfloor\right|$ alors $p \in \mathbb{N}$. Comme f et g sont paires, $f(u_p) = f\left(\frac{pa}{2^q}\right)$ et $g(u_p) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$.

Le 4.b permet alors de conclure $\boxed{f(u_q) = g(u_q).}$

-d- La suite (u_q) converge vers x, les fonctions f et g sont continues donc la suite $(f(u_q))$ converge vers $f(x)$ et la suite $(g(u_q))$ converge vers $g(x)$, or ces deux suites sont égales, donc :

$$\boxed{f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right).}$$

5) On a montré aux 2.b et 4.d que

$$\mathcal{E} \subset \{f \equiv 0\} \cup \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \end{array} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

On vérifie alors la réciproque: ces fonctions conviennent c'est-à-dire sont continues, s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$ et vérifient l'équation fonctionnelle. C'est la question 1.