Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ avec

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x \quad (> 0 \text{ si } x > 0).$$

Par conséquent f_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Finalement f_n est continue sur $[0,+\infty[$, strictement monotone sur $[0,+\infty[$ et donc d'après le théorème de la bijection monotone f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $f_n([0,+\infty[) = [-4,+\infty[$.
Finalement, comme $0 \in [-4,+\infty[$, $\boxed{\text{il existe un unique } x_n \in [0,+\infty[\text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{18} \quad \text{donc} \quad \boxed{x_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18}}$$

$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad \text{donc} \quad \boxed{x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}.$$

3)
- **Méthode 1**: soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = -4$, $f_n(1) = 6$, de plus f_n continue sur $]0,1[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 0$. L'unicité de x_n dans 1) donne $c = x_n$. Finalement $\boxed{x_n \in]0,1[}$.
- **Méthode 2**: on peut ré-appliquer le théorème de la bijection monotone à f_n sur $]0,1[$.
- **Méthode 3**: $f_n(0) = -4$, $f_n(1) = 6$ et $f_n(x_n) = 0$ donc $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$. On peut donc appliquer f_n^{-1} qui est strictement croissante comme f_n, d'après le théorème de la bijection monotone, pour obtenir $0 < x_n < 1$.

4) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0,1[$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^{n+1} + 9x^2 - 4) - (x^n + 9x^2 - 4) = x^n(x-1) \quad \text{donc} \quad \boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0}.$$

-b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après 3), $x_{n+1} \in]0,1[$, donc d'après 4)-a- avec $x = x_{n+1}$

$$\underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_{=0} - f_n(x_{n+1}) < 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{f_n(x_{n+1}) > 0}.$$

Comme $f_n(x_n) = 0$, il vient $f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n)$. En appliquant f_n^{-1} qui est strictement croissante il vient $x_{n+1} > x_n$ et donc la suite $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante}}$.

-c- Finalement la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1 donc $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } l \in [0,1]}$.

5) -a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 0$ se réécrit $x_n^n = 4 - 9x_n^2$. Comme (x_n) converge vers l, on en déduit que (x_n^n) converge vers $4 - 9l^2$.
Or (x_n^n) est positive car (x_n) est positive, donc par passage à la limite sa limite est positive i.e. $4 - 9l^2 \geqslant 0$. On en déduit que $l^2 \leqslant \frac{4}{9}$ et donc $0 \leqslant l \leqslant \frac{2}{3}$. Or d'après le théorème de la limite montone appliquée à (x_n), l est la borne supérieure de (x_n), donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant x_n \leqslant l \leqslant \frac{2}{3} \qquad \text{donc} \qquad 0 \leqslant x_n^n \leqslant l^n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc, par théorème d'encadrement, $\boxed{(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$.
Attention : on ne peut utiliser le résultat qui affirme $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ pour $q \in]-1,1[$. Car q doit être indépendant de n, on ne peut donc prendre $q = x_n$ même s'il est vrai que $x_n \in]0,1[$.

Prenez par exemple $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1}$ (utilisez des équivalents par exemple) alors que $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$.

-b- En passant à la limite la relation $x_n^n = 4 - 9x_n^2$, il vient $0 = 4 - 9l^2$ d'où $\boxed{l = \dfrac{2}{3}}$ (car $l \geqslant 0$ d'après 4)-c-).

6) On pose $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = l - x_n \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

-a- Tout d'abord comme déjà vu: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant l$ et donc: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De $x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0$ on tire:

$$\frac{1}{6}x_n^n = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x_n^2 = l - \frac{1}{l}x_n^2 = \frac{1}{l}(l^2 - x_n^2) = \frac{1}{l}\underbrace{(l - x_n)}_{=u_n}\underbrace{(l + x_n)}_{\geqslant l} \geqslant u_n.$$

On a donc bien: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{6}x_n^n}$.

-b- Tout d'abord pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ d'après 6)-a-, donc (S_n) est croissante.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, d'après 6)-a- et le fait que $x_k \leqslant \frac{2}{3}$, on a: $u_k \leqslant \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.

On somme alors cette inégalité pour $k \in [\![1, n]\!]$, où $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{6}\frac{2}{3}\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \leqslant \frac{1}{3}.$$

Donc (S_n) est majorée.

Donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(S_n) \text{ converge}}$.