Problème

Partie I - Etude de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln(n)$.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k}$ pour tout entier naturel $k \geqslant 2$.

2) Déterminer alors un équivalent de H_n puis la limite de H_n.

3) Étudier la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire la convergence de cette suite. On notera γ la limite (c'est la constante d'Euler).

4) **Une suite vue en cours**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
   On a vu en cours que cette suite converge (grâce au théorème de la limite monotone), l'objectif ici est d'en calculer la limite.
   - -a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = H_{2n} - H_n$.
   - -b- À l'aide de I-3), en déduire la limite de (b_n).

5) **Une autre suite vue en TD**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   On a vu en TD que cette suite converge (grâce aux suites (c_{2n}) et c_{2n+1} prouvées adjacentes), l'objectif ici est d'en calculer la limite.
   En regroupant habilement les termes d'indice pair et impair calculer la limite de la suite (c_n).

Partie II - Etude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$ où f est définie par $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

1) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin de prouver qu'elle converge et déterminer sa limite.

2) -a- Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.
   Puis montrer, par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   - -b- Prouver: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k-1}} = 2 + u_{k-1}$.
     Puis: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \leqslant \dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k-1}} \leqslant 2 + \dfrac{1}{k}$.
   - -c- En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de n et de H_n.

3) Déterminer alors à l'aide de la partie I un équivalent de $\dfrac{1}{u_n}$ puis de u_n.

Exercice. Facultatif Soit u une suite pour laquelle $u_0 \geqslant 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n}{\lfloor u_n \rfloor}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite u est bien définie.

2) Montrer que $u_n \sim n$ en utilisant le théorème de Cesaro.