

Exercice 1 On pose $f : x \mapsto \frac{\cos x - 1}{\tan x}$.

1) -a- \tan est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ et s'annule en $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ donc f est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$.

L'ensemble de définition peut aussi être noté : $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2} \right[$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$,

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) - 1}{\tan(-x)} = -\frac{\cos(x) - 1}{\tan x} = -f(x) \quad \text{donc } f \text{ est impaire.}$$

-b- **Limite en 0.** Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$f(x) = \frac{\frac{\cos x - 1}{x}}{\frac{\tan x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\cos'(0)}{\tan'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Limite en $\frac{\pi}{2}$. Par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$.

-c- On prolonge donc f par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ en posant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Dérivabilité en 0. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos x - 1}{x \tan x} = \frac{\frac{\cos x - 1}{x^2}}{\frac{\tan x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \quad (\text{limites usuelles}).$$

Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Dérivabilité en $\frac{\pi}{2}$. Pour h au voisinage de 0,

$$\frac{f(\frac{\pi}{2} + h) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + h) - 1}{h \tan(\frac{\pi}{2} + h)} = \frac{-\sin h - 1}{-h \frac{1}{\tan h}} = \frac{\tan h(1 + \sin h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

par produit de limites où l'on a utilisé la limite usuelle $\frac{\tan h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$.

Donc f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ avec $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

-d- Comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $D =]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et pour $x \in D$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x \tan x - (\cos x - 1) \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{-\sin x \frac{\sin x}{\cos x} - (\cos x - 1) \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{-\sin^2 x \cos x - (\cos x - 1)}{\sin^2 x} = \frac{(\cos^2 x - 1) \cos x - (\cos x - 1)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)}{\sin^2 x}.$$

-e- Par imparité de f et d'après le prolongement réalisé en $\frac{\pi}{2}$, la fonction f est aussi prolongeable par continuité en $-\frac{\pi}{2}$ en posant $f(-\frac{\pi}{2}) = 0$, le prolongement ainsi obtenue est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ avec $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Si on note \tilde{f} la fonction ainsi prolongée, elle est bien dérivable sur $] -\pi, \pi[$ et sa restriction à D est f .

2) On calcule $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

On pose $t = \cos x$ alors $dt = -\sin x dx$ et $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x - 1)(-\sin x) dx}{\frac{-\sin^2 x}{\cos x}} dx \\ &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1) dt}{\frac{t^2-1}{t}} \quad (\text{on a utilisé } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2) \\ &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t+1} dt \\ &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= [t - \ln|t+1|]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{3}\right). \end{aligned}$$

3) On considère l'équation différentielle : (E) $y'(x) + \frac{2}{\sin(2x)}y(x) = -\cos x$ où $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

-a- Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on calcule $\int^x \frac{2}{\sin(2t)} dt = \int^x \frac{1}{\sin(t) \cos t} dt$ en posant $s = \tan t$ alors $ds = \frac{1}{\cos^2 t} dt$, donc

$$\begin{aligned} \int^x \frac{2}{\sin(2t)} dt &= \int^x \frac{\cos t}{\sin(t) \cos^2 t} dt \\ &= \int^{\tan x} \frac{1}{s} ds \\ &= \ln|\tan x| + C \text{ où } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Or $\tan x > 0$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc une primitive de $x \mapsto \frac{2}{\sin(2x)}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est donc $x \mapsto \ln(\tan x)$.

-b- La solution générale de l'équation homogène associée à (E) sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est donc :

$$x \mapsto \lambda e^{-\ln(\tan x)} = \frac{\lambda}{\tan x} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

-c- Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on utilise le calcul de $f'(x)$ de 1)-d-

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{2}{\sin(2x)}f(x) &= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} \frac{\cos x - 1}{\tan x} \\ &= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1) + (\cos x - 1)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\sin^2 x} \\ &= -\cos x \quad (\text{on a utilisé } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)) \end{aligned}$$

donc f est solution particulière de (E).

-d- On détermine une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

Posons, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\tan x}$ où λ est supposée dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Alors, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\tan x} \quad y'_p(x) = \frac{\lambda'(x)}{\tan x} - \lambda(x) \frac{1}{\tan^2 x \cos^2 x} = \frac{\lambda'(x)}{\tan x} - \lambda(x) \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Et donc :

$$y'_p(x) + \frac{2}{\sin(2x)} y_p(x) = \frac{\lambda'(x)}{\tan x}.$$

On en déduit

$$y_p \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \lambda'(x) = -\cos x \tan x = -\sin x.$$

On pose alors $\lambda : x \mapsto \cos x$ et donc $y_p : x \mapsto \frac{\cos x}{\tan x}$ est solution particulière de (E) .

-e- D'après 3)-b- et 3)-c- on déduit :

$$\text{l'ensemble-solution de } (E), \left\{ \begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{\cos x} + f(x) \quad / \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

-f- On souhaite l'équation différentielle : $(F) \quad \sin(2x)y'(x) + 2y(x) = -\cos x \sin(2x)$ sur $] -\pi, \pi[$.
Sur chaque intervalle $I_1 =] -\pi, -\frac{\pi}{2}[$, $I_2 =] -\frac{\pi}{2}, 0[$, $I_3 =]0, \frac{\pi}{2}[$, $I_4 =]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $x \mapsto \sin(2x)$ ne s'annule pas, l'équation se réécrit sous la forme :

$$y'(x) + \frac{2}{\sin(2x)} y(x) = -\cos x.$$

Par une résolution similaire à 3)-d-, la solution générale de (F) sur chaque (E_i) est :

$$y_i : x \mapsto \frac{\lambda_i}{\tan x} + \tilde{f}(x)$$

où les λ_i sont réels. On souhaite raccorder les solutions.

Par continuité.

En $-\frac{\pi}{2}$. Comme $\tan x \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \pm\infty$ et $\tilde{f}(-\frac{\pi}{2}) = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} y_1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} y_2 = 0$. Les limites sont finies et

égales et on prolonge y_1 et y_2 en posant $y_1(-\frac{\pi}{2}) = y_2(-\frac{\pi}{2}) = 0$.

En $\frac{\pi}{2}$. De même $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y_3 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y_4 = 0$. Les limites sont finies et égales et on prolonge y_3 et y_4 en posant

$$y_3(\frac{\pi}{2}) = y_4(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

En 0. Comme $\tan x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $\frac{\lambda_2}{\tan x}$ et $\frac{\lambda_3}{\tan x}$ n'admettent une limite finie que si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ dans ce cas

comme $\tilde{f}(0) = 0$ on a, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_3 = 0$. Les limites sont finies et égales et on prolonge y_2 et y_3 en posant $y_2(0) = y_3(0) = 0$.

Par dérivabilité (désormais $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$).

En $\frac{\pi}{2}$. Pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$,

$$\frac{\frac{\lambda_4}{\tan(\frac{\pi}{2}+h)} - 0}{h} = \frac{-\lambda_4 \tan h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\lambda_4.$$

Et donc en utilisant $\tilde{f}'(\frac{\pi}{2}) = 1$:

$$\frac{y_4(\frac{\pi}{2} + h) - y_4(\frac{\pi}{2})}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\lambda_4 + 1.$$

Or comme $\lambda_3 = 0$, alors $y_3 = \tilde{f}$, de plus $\tilde{f}'(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc

$$\frac{y_3(\frac{\pi}{2} + h) - y_3(\frac{\pi}{2})}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Les limites existantes sont finies et égales si et seulement si $\lambda_4 = 0$.

En $-\frac{\pi}{2}$. On obtient $\lambda_1 = 0$.

Equation vérifiée en $-\frac{\pi}{2}$, 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On vérifie facilement qu'avec $\tilde{f}(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\tilde{f}'(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\tilde{f}'(0) = 0$, $\tilde{f}'(\frac{\pi}{2}) = 1$ l'équation est vérifiée par \tilde{f} en ces trois valeurs.

Conclusion : l'unique solution de (F) sur $] -\pi, \pi[$ est \tilde{f} .