MPSI/MP2I – Devoir Surveillé n° 3

Samedi 16 novembre 2024

Durée : 3 heures 30

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1

Dans cet exercice on va établir l'identité suivante de deux façons différentes :

$$\forall x \in [0,1], \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1). \tag{$\star$}$$

1. *Par dérivation.* On considère la fonction

$$\varphi : \left| \begin{array}{lcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1). \end{array} \right.$$

   (a) Justifier que φ est bien définie et continue sur $[0,1]$, et dérivable sur $]0,1[$.

   (b) Démontrer alors la formule $(\star)$.

2. *Par trigonométrie.* Soit x un élément de $[0,1]$. On pose

$$\theta = 2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}.$$

   (a) Simplifier l'expression de $\sin(\theta)$ en fonction de x.

   (b) En déduire la relation $(\star)$.

Exercice 2

Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On pose

$$I = \int_0^{\pi} x\, f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$$

1) Montrer que f est continue sur $[0,\pi]$.

2) *Changements de variable affines.*

   -a- Effectuer le changement de variable $x = \pi - t$ dans I. En déduire que :

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   -b- À l'aide de la relation de Chasles, montrer alors que :

$$I = \pi \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + b^2u^2}.$$

4) En déduire une primitive de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis déterminer la valeur de I.

Exercice 3

Soit $k \in \mathbb{R}$, le but du problème est d'étudier les fonctions f définies et dérivables sur $]0,+\infty[$ et solutions de l'équation suivante

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = k\, f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (E_k).$$

A - Résolution dans le cas $k = -\frac{1}{2}$

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$,

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{\alpha}{\sqrt{x}} \qquad (G).$$

On raisonne par analyse-synthèse. On suppose désormais que f est solution de $\left(E_{-\frac{1}{2}}\right)$ et on pose

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Montrer que la fonction g est constante sur $]0,+\infty[$.
3) En déduire que : $\forall x > 0, \quad f'(x) - \dfrac{1}{2x}f(x) = -\dfrac{f(1)}{\sqrt{x}}$.
4) Déterminer alors une expression de f.
5) En déduire l'ensemble des fonctions vérifiant $\left(E_{-\frac{1}{2}}\right)$.

B - Résolution lorsque $k \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

Soit k un réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On pose l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$,

$$x^2 y'' + k^2 y = 0 \qquad (F_k).$$

1) Déterminer un réel $\beta > \dfrac{1}{2}$ (dépendant de k) tel que $x \mapsto x^\beta$ soit solution de (F_k).
2) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
   Pour $x \in]0,+\infty[$, on pose $z(x) = \dfrac{y(x)}{x^\beta}$ où β est la valeur déterminée à la question précédente.

   Montrer que y est solution de (F_k) si et seulement si z' est solution d'une équation linéaire d'ordre 1 (F'_k) à déterminer.
   Dans les calculs on utilisera la lettre β sans la remplacer par la valeur trouvée en B-1).
3) Résoudre l'équation (F'_k), en déduire les solutions de (F_k).
4) Déduire de ce qui précède la résolution de (E_k) dans le cas $k \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : t \mapsto (t - t^2)^n$ et on pose

$$I_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \int_0^1 f_n(t) \sin(\pi t)\, \mathrm{d}t.$$

1) -a- Calculer I_0 et I_1.
   -b- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \ f''_n(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t)$.
   En déduire que :
   $$I_n = 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}.$$
2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \neq 0$ ou $I_{n+1} \neq 0$.
3) On suppose dans cette question qu'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$.

-a- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^n I_n \in \mathbb{Z}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les variations de f_n sur $[0,1]$ puis montrer que : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi^{2n+1}}{4^n\, n!}$

On pourrait en déduire, mais on l'admettra, que la suite $(b^n I_n)$ tend vers 0.

-c- Établir finalement une contradiction avec le résultat de la question 2. Qu'avez-vous démontré ?