MPSI/MP2I – Devoir Surveillé 3

Samedi 16 Novembre

Corrigé

Exercice 1

1) -a- Pour tout $x \in [0,1]$ on a bien $x \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{x} \in [-1,1]$ et $2x-1 \in [-1,1]$. Donc φ est bien définie et continue sur $[0,1]$ par compositions et opérations sur les fonctions continues.
La condition stricte $x \in]0,1[$ implique de plus $x \neq 0$ et $\sqrt{x} \neq 1$ et $2x-1 \notin \{-1,1\}$, d'où la dérivabilité de φ par compositions et opérations sur les fonctions dérivables.

-b- Pour tout $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \times 2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(1-x)x}} - \frac{1}{\sqrt{1-1+4x-4x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4(1-x)x}} - \frac{1}{\sqrt{4(1-x)x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction φ est constante sur l'intervalle $]0,1[$. Elle donc aussi constante sur le segment $[0,1]$ par continuité. Enfin :

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= \operatorname{Arcsin}(0) - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(-1) \\
&= 0 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

2) -a- L'angle $\alpha = \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifie $\sin(\alpha) = \sqrt{x}$, donc :

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \sin(2\alpha - \tfrac{\pi}{2}) \\
&= -\cos(2\alpha) \\
&= 2\sin(\alpha)^2 - 1 \\
&= \boxed{2x-1}.
\end{aligned}$$

-b- Par croissance de Arcsin, $\sqrt{x} \in [0,1]$ implique $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc :

$$0 - \frac{\pi}{2} \leqslant 2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Or $\sin(\theta) = 2x-1$, donc $\operatorname{Arcsin}(2x-1) = \theta$ par définition d'Arcsin comme bijection réciproque de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Conclusion :

$$\boxed{2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arcsin}(2x-1)},$$

ce qui équivaut clairement à la formule $(*)$.

Exercice 2

Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On pose

$$I = \int_0^{\pi} x\, f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$$

1) Puisque les fonctions cos et sin ne s'annulent jamais en même temps, alors la fonction

$$x \longmapsto a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)$$

somme de deux fonctions positives, ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle y est de plus continue en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions usuelles qui le sont.
Nous en déduisons que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant qu'inverse de fonction continue sur cet intervalle et ne s'y annulant pas.

2) *Changements de variable affines.*

-a- Posons le changement de variable $x = \pi - t$ dans I. Alors $t = \pi - x$ et la fonction $t \longmapsto \pi - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculons $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_\pi^0 \frac{\pi - t}{a^2\cos^2(\pi - t) + b^2\sin^2(\pi - t)}(-1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{\pi - t}{a^2(-\cos(t))^2 + b^2\sin^2(t)}\mathrm{d}t \quad (\text{car } \forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) \text{ et } \sin(\pi - x) = \sin(x)) \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{1}{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin^2(t)}\mathrm{d}t - \int_0^\pi \frac{t}{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin^2(t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'où $I = \pi\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x - I$, donc $2I = \pi\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ et ainsi :

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

-b- D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^\pi f(x)\,\mathrm{d}x\right) \quad (\text{d'après la relation de Chasles})
\end{aligned}$$

Effectuons dans l'intégrale $\int_{\pi/2}^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ le changement de variable $x = \pi - t$ dans I. La fonction $t \longmapsto \pi - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculons $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/2}^0 \frac{1}{a^2\cos^2(\pi - t) + b^2\sin^2(\pi - t)}(-1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin^2(t)}\mathrm{d}t \quad (\text{comme dans le calcul ci-dessus}) \\
&= \int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Finalement, $I = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$, et donc

$$\boxed{I = \pi\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

3) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Commençons par remarquer que :

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin^2(t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{1}{a^2 + b^2\tan^2(t)} \times \frac{1}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Cela nous invite à poser le changement de variable $u = \tan(t)$. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t$, doù :

$$\boxed{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + b^2u^2}}.$$

4) Puisque f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction :

$$F : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ s'annulant en 0. De plus, elle est de classe

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + b^2u^2} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{b^2}\int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{\frac{a^2}{b^2} + u^2} \quad \text{(car } b > 0 \text{ et par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{b^2}\int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + u^2} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{b^2}\left[\frac{1}{\frac{a}{b}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{\frac{a}{b}}\right)\right]_0^{\tan(x)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{ab}\mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\tan(x)\right) \end{array}$$

Comme F est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors :

$$\begin{array}{rcl} F\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & \displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} F(x) \\ & = & \displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{ab}\mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\tan(x)\right) \end{array}$$

Or $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$, donc par produit par un réel strictement positif, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{b}{a}\tan(x) = +\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$, alors par composition $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\tan(x)\right) = \frac{\pi}{2}$. Nous en déduisons par produit par un réel strictement positif que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} F(x) = \frac{\pi}{2ab}$.

Comme $I = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$, alors nous concluons que :

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{2ab}}.$$

Exercice 3

Problème

A - Résolution dans le cas $k = -\frac{1}{2}$

1) On pose $a : x \mapsto -\dfrac{1}{2x}$ et $A : x \mapsto -\frac{1}{2}\ln|x| = -\ln\sqrt{x}$ une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$.
La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{1}{2x}y = 0$ est donc :

$$x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\ln\sqrt{x}} = \lambda\sqrt{x} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par la méthode de la variation de la constante on cherche une solution particulière de (G) de la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)\sqrt{x}$ où λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_p'(x) = \lambda'(x)\sqrt{x} + \lambda(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc,

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de } (G) &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \lambda'(x)\sqrt{x} + \lambda(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}\lambda\sqrt{x} = \frac{\alpha}{\sqrt{x}} \\
&\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \lambda'(x)\sqrt{x} = \frac{\alpha}{\sqrt{x}} \\
&\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \lambda'(x) = \frac{\alpha}{x}.
\end{aligned}$$

On pose $\lambda : x \mapsto \alpha \ln|x| = \alpha \ln x$ donc $y_p : x \mapsto \alpha\sqrt{x}\ln x$.

$$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (G) \text{ est donc } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\sqrt{x} + \alpha\sqrt{x}\ln x \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$

2) **Analyse**. Soit f solution de $(E_{-\frac{1}{2}})$.
Par opérations et composition, g est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{f'(x)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}f(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\sqrt{x}}f'\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Comme f est solution de $(E_{-\frac{1}{2}})$, on a $f'(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right)$ et on peut substituer $\frac{1}{x}$ à x pour obtenir $f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}f(x)$, que l'on remplace dans $(*)$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x\sqrt{x}}f(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x\sqrt{x}}f(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^*}$. Pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1) = 2f(1)$.

3) Soit $x > 0$,

$$f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x}f(x) \ (**) \qquad \text{car } f \text{ est solution de } (E_{-\frac{1}{2}}).$$

D'après A-2), on peut isoler $f\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2f(1) - \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\right).$$

On reporte dans l'égalité $(**)$,

$$f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(2f(1) - \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{2x}f(x)$$

$$\boxed{f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = -\frac{f(1)}{\sqrt{x}}}.$$

4) D'après A-3), f vérifie une équation différentielle de la forme (G) avec $\alpha = -f(1)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \lambda\sqrt{x} - f(1)\sqrt{x}\ln x.$$

En évaluant en 1, $f(1) = \lambda$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = f(1)\sqrt{x}(1 - \ln x).$$

5) On effectue la synthèse. On pose $f : x \mapsto C\sqrt{x}(1-\ln x)$ où $C \in \mathbb{R}$.
Par opérations f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= C\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\ln x) - C\frac{1}{\sqrt{x}}\\
&= C\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}(1-\ln x) - 1\right)\\
&= -C\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}(1+\ln x)\\
&= -C\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}\left(1-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Donc f est solution de $\left(E_{-\frac{1}{2}}\right)$.

Conclusion, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } \left(E_{-\frac{1}{2}}\right) \text{ est } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\sqrt{x}(1-\ln x) \end{array} \;/\; C \in \mathbb{R} \right\}}$

B - Résolution lorsque $k \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

Soit k un réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
On pose l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$x^2y'' + k^2y = 0 \qquad (F_k).$$

1) Soit $\beta > \frac{1}{2}$. On pose $u : x \mapsto x^\beta$. Alors u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u''(x) = \beta(\beta-1)x^{\beta-2}$,

$$\begin{aligned}
u \text{ solution de } (F_k) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \beta(\beta-1)x^\beta + k^2x^\beta = 0\\
&\Leftrightarrow \beta^2 - \beta + k^2 = 0.
\end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4k^2 > 0$ car $k \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, ses solutions sont $\dfrac{1-\sqrt{1-4k^2}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2}$.
Comme $\beta > \frac{1}{2}$, on rejette la première valeur.
Finalement, $\boxed{x \mapsto x^\beta \text{ est solution de } (F_k) \text{ si et seulement si } \beta = \dfrac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2}}$.

2) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $z(x) = \dfrac{y(x)}{x^\beta}$ où β est la valeur déterminée à la question précédente.
Par quotient z est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, avec pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{cases}
y(x) = z(x)x^\beta\\
y'(x) = z'(x)x^\beta + \beta z(x)x^{\beta-1}\\
y''(x) = z''(x)x^\beta + 2\beta z'(x)x^{\beta-1} + \beta(\beta-1)z(x)x^{\beta-2}
\end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (F_k) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z''(x)x^{\beta+2} + 2\beta z'(x)x^{\beta+1} + \beta(\beta-1)z(x)x^\beta + k^2x^\beta z(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z''(x)x^2 + 2\beta z'(x)x + (\beta(\beta-1)+k^2)z(x) = 0 \qquad (\text{car } x^\beta \neq 0)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z''(x)x + 2\beta z'(x) = 0 \qquad (\text{car } \beta(\beta-1)+k^2 = 0 \text{ et } x^\beta \neq 0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{y \text{ solution de } (F_k) \Leftrightarrow z' \text{ solution de } (F_k') : Z' + \tfrac{2\beta}{x}Z = 0}.$$

3) Une primitive de $x \mapsto \frac{2\beta}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto 2\beta\ln|x| = 2\beta\ln(x) = \ln\left(x^{2\beta}\right)$.
$\boxed{\text{La solution générale de } (F_k') \text{ est donc } x \mapsto \dfrac{\lambda}{x^{2\beta}} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$. Puis on poursuit B-3), en intégrant $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x^{2\beta}}$,

$$y \text{ solution de } (F_k) \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = \frac{\lambda}{-2\beta+1}x^{-2\beta+1} + \mu$$

On peut remplacer $\frac{\lambda}{-2\beta+1}$ par un autre λ, et utiliser $y(x) = x^\beta z(x)$,

$$\boxed{y \text{ solution de } (F_k) \ \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \lambda x^{-\beta+1} + \mu x^\beta}.$$

4) On résout maintenant (E_k) par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f solution de (E_k). Comme $f'(x) = kf\left(\frac{1}{x}\right)$ et f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ alors par composition avec $x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On dérive, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) = -\frac{k}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puis on substitue $\frac{1}{x}$ à x, dans (E_k), donc :

$$f''(x) = -\frac{k}{x^2} kf(x) = -\frac{k^2}{x^2} f(x).$$

Donc

$$x^2 f''(x) + k^2 f(x) = 0.$$

Donc f est solution de (F_k), donc d'après B-3), f est de la forme $f : x \mapsto \lambda x^{-\beta+1} + \mu x^\beta$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Synthèse. On pose $f : x \mapsto \lambda x^{-\beta+1} + \mu x^\beta$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, qui est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) - kf\left(\frac{1}{x}\right) &= \lambda(-\beta+1)x^{-\beta} + \mu\beta x^{\beta-1} - k\left(\lambda x^{\beta-1} + \mu x^{-\beta}\right) \\ &= (\lambda(-\beta+1) - k\mu)x^{-\beta} + (\mu\beta - \lambda k)x^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Or $-\beta+1 \neq \beta$ car $\beta \neq \frac{1}{2}$, donc les fonctions $x \mapsto x^{-\beta}$ et $x \mapsto x^{\beta-1}$ ne sont pas proportionnelles, il découle

$$\begin{aligned} \left[\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) - kf\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right] &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(-\beta+1) - k\mu = 0 \\ \mu\beta - \lambda k = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(-\beta+1) - \frac{\lambda k^2}{\beta} = 0 \\ \mu = \frac{\lambda k}{\beta} \end{cases} \end{aligned}.$$

Or

$$\lambda(-\beta+1) - \frac{\lambda k^2}{\beta} = \frac{\lambda}{\beta}(\beta(1-\beta) - k^2) = 0 \quad \text{car } \beta^2 - \beta + k^2 = 0.$$

Donc

$$\left[\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) - kf\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right] \Leftrightarrow \mu = \frac{\lambda k}{\beta}.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E_k) \text{ est } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\left(x^{-\beta+1} + \frac{k}{\beta}x^\beta\right) \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : t \mapsto (t - t^2)^n$ et on pose

$$I_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \int_0^1 f_n(t) \sin(\pi t)\, \mathrm{d}t.$$

1) -a-

$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin(\pi t) \mathrm{d}t = \pi \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = \pi\left(-\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right) = 2$$

Par ailleurs, en effectuant des intégrations par parties (on dérive le polynôme et on primitive les fonctions trigonométriques), on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 =& \pi^3 \int_0^1 (t-t^2)\sin(\pi t)\mathrm{d}t \\
=& \pi^3 \left[t(1-t)\left(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right)\right]_0^1 - \pi^3 \int_0^1 (1-2t)\left(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right)\mathrm{d}t \\
=& \pi^2 \int_0^1 (1-2t)\cos(\pi t)\mathrm{d}t \\
=& \pi^2 \left[(1-2t)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 - \pi^2 \int_0^1 (-2)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\mathrm{d}t \\
=& 2\pi \int_0^1 \sin(\pi t)\mathrm{d}t \\
=& 2\pi \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = 2\pi\left(-\frac{-1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right) \\
=& 4
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{I_0 = 2 \text{ et } I_1 = 4}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. La fonction f_n est indéfiniment dérivable comme toute fonction polynomiale. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n'(t) = n(1-2t)(t-t^2)^{n-1}$$

et

$$\begin{aligned}
f_n''(t) &= n(-2)(t-t^2)^{n-1} + n(1-2t)(n-1)(1-2t)(t-t^2)^{n-2} \\
&= -2nf_{n-1}(t) + n(n-1)(1-2t)^2(t-t^2)^{n-2} \\
&= -2nf_{n-1}(t) + n(n-1)(1-4(t-t^2))(t-t^2)^{n-2} \\
&= -2nf_{n-1}(t) + n(n-1)\left((t-t^2)^{n-2} - 4(t-t^2)^{n-1}\right) \\
&= -2nf_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t) - 4n(n-1)f_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n''(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t)}$$

En effectuant des intégrations par parties (là encore, on dérive le polynôme et on primitive les fonctions trigonométriques), on obtient

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\left[f_n(t)\left(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right)\right]_0^1 - \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 f_n'(t)\left(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^{2n}}{n!}\int_0^1 f_n'(t)\cos(\pi t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^{2n}}{n!}\left[f_n'(t)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 - \frac{\pi^{2n}}{n!}\int_0^1 f_n''(t)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi^{2n}}{n!}\int_0^1 \left(-2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t)\right)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2(2n-1)\pi^{2n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 f_{n-1}(t)\sin(\pi t)\mathrm{d}t - \frac{\pi^{2n-1}}{(n-2)!}\int_0^1 f_{n-2}(t)\sin(\pi t)\mathrm{d}t \\
&= 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}
\end{aligned}$$

d'où,

$$\boxed{I_n = 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}}$$

2) À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe l'assertion $\mathcal{P}(n)$: $I_n \neq 0$ ou $I_{n+1} \neq 0$.

— **Initialisation :** $I_0 = 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Par hypothèse $I_n \neq 0$ ou $I_{n+1} \neq 0$. Dans le cas $I_{n+1} \neq 0$, on a directement $\mathcal{P}(n+1)$. Dans le cas contraire $I_n \neq 0$ et la question précédente donne :

$$\pi^2 I_n = 2(2n+3)I_{n+1} - I_{n+2},$$

donc nécessairement $I_{n+1} \neq 0$ ou $I_{n+2} \neq 0$. Dans tous les cas, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n \neq 0 \text{ ou } I_{n+1} \neq 0}$.

3) -a- Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $b^n I_n \in \mathbb{Z}$. On raisonne par récurrence double :

— **Initialisation** : $b^0 I_0 = I_0 = 2 \in \mathbb{Z}$ et $b^1 I_1 = 4b \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

— **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ tel que $\mathcal{P}(n-2)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies et démontrons $\mathcal{P}(n)$. D'après ce qui précède, on a

$$b^n I_n = 2b(2n-1)b^{n-1}I_{n-1} - (\pi b)^2 b^{n-2} I_{n-2}$$

et donc $b^n I_n \in \mathbb{Z}$, soit $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— **Conclusion** : D'après le principe du raisonnement par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b^n I_n \in \mathbb{Z}}$.

-b- La fonction polynomiale $f : t \mapsto t - t^2$ est croissante de $[0, \frac{1}{2}]$ dans $[0, \frac{1}{4}]$ puis décroissante de $[\frac{1}{2}, 1]$ dans $[0, \frac{1}{4}]$. Par composition avec la puissance n-ième,

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

Comme $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$, on obtient par produit :

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_n(t)\sin(\pi t) \leqslant \frac{\sin(\pi t)}{4^n} \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

D'où, par croissance de l'intégrale sur le segment $[0, 1]$, on a

$$\int_0^1 0 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{4^n}\mathrm{d}t$$

En multipliant cet encadrement par la quantité positive $\frac{\pi^{2n+1}}{n!}$, on obtient

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi^{2n+1}}{4^n n!}.}$$

-c- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après -a- et -b-, $b^n I_n$ et $b^{n+1}I_{n+1}$ sont des entiers positifs et l'un au moins n'est pas nul d'après la question 2. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b^n I_n + b^{n+1} I_{n+1} \geqslant 1.$$

Par passage à la limite on obtient $0 + 0 \geqslant 1$, ce qui est absurde.

On en déduit qu'il existe pas d'entiers $a, b > 0$ tels que $\pi = \frac{a}{b}$. Autrement dit : $\boxed{\pi \text{ est irrationnel.}}$