MPSI/MP2I – Devoir Surveillé n° 4

Samedi 7 décembre 2024

Durée : 4 heures

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1 - Deux suites pour une équation

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère l'équation suivante, d'inconnue x dans $\mathbb{R}_+$:

$$(E_n) : \quad x^n = \mathrm{e}^x.$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on introduit la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x^n\,\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

de sorte que les solutions de (E_n) sont exactement les réels $x \in \mathbb{R}_+$ qui annulent la fonction f_n.

On pourra utiliser le fait que $2 < \mathrm{e} < 3$ *dans cet exercice.*

Partie A : Étude de l'équation (E_n) sur $\mathbb{R}_+$. Soit $n \geqslant 3$.

1) Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$.
2) Justifier que $1 - n^n \mathrm{e}^{-n} < 0$.
3) En déduire que (E_n) admet exactement deux solutions positives $u_n < v_n$ et qu'elles vérifient :
$$1 < u_n \leqslant n \leqslant v_n.$$
4) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ admet une limite, qu'on déterminera.

Partie B : Étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4 .
   -a- Montrer que $f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1}$.
   -b- En déduire que $f_n(u_{n-1}) < 0$.
2) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
3) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente.
4) On note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   -a- Justifier que tout entier $n \geqslant 3$ satisfait l'égalité $u_n = \mathrm{e}^{u_n/n}$. En déduire la valeur de ℓ.
   -b- Étudier la limite éventuelle de $n(u_n - \ell)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 - Une suite récurrente

Dans tout l'exercice, on considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$0 \leqslant u_0 \leqslant 2\pi \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \sin(u_n)^3.$$

On rappelle que, pour tout $x \in]0, \pi[$, $0 < \sin(x) < x$.

1) On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto x - \sin(x)^3$.

   -a- Montrer que l'intervalle $[0, \pi]$ est stable par f.
   Indication : il est très fortement déconseillé de chercher les variations de f.

   -b- Montrer que l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ est stable par f.
   Indication : écrire les éléments x de $[\pi, 2\pi]$ sous la forme $x = 2\pi - t$.

2) Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, en cas de convergence, préciser la limite.
On sera amené à distinguer différents cas, selon la valeur de u_0 (qui est élément de $[0, 2\pi]$).

3) On se place maintenant dans la situation où $0 < u_0 < \pi$.

   -a- Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers un certain réel $\lambda > 0$, dont on précisera la valeur.

   -b- On rappelle que, selon le lemme de Cesàro, la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ tend alors vers λ.
   En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 1 - Applications croissantes pour l'inclusion

Dans tout ce problème :

- E et F désignent des ensembles quelconques ;
- f est une application de E dans F ;
- g est une application de F dans E.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
La différence de deux parties A_1, A_2 de E est notée : $A_1 \setminus A_2$.
Le complémentaire dans E d'une partie A de E peut alors être noté : $E \setminus A$.

Notations particulières Pour éviter les confusions avec les applications définies sur $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$, on notera :

- $f[A]$ l'image directe par f d'une partie $A \in \mathcal{P}(E)$, habituellement notée $f(A)$.
- $g[B]$ l'image directe par g d'une partie $B \in \mathcal{P}(F)$, habituellement notée $g(B)$.

Les parties I, II et III sont totalement indépendantes à l'exclusion de la définition de la croissance pour l'inclusion.
La partie IV utilise les résultats des parties précédentes.

Partie I - Préliminaire

1) On considère une application $g : F \to E$ que l'on suppose injective.

   -a- Montrer que l'application $\widetilde{g} : \begin{array}{ccc} F & \to & g[F] \\ y & \mapsto & g(y) \end{array}$ est bijective.

   -b- Montrer que : $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ g[F \setminus B] = g[F] \setminus g[B]$.

2) Soient E_1, E_2 des parties de E disjointes telles que $E = E_1 \cup E_2$.
Soient F_1, F_2 des parties de F disjointes telles que $F = F_1 \cup F_2$.
On considère $\varphi_1 : E_1 \to F_1$ et $\varphi_2 : E_2 \to F_2$ deux bijections et on pose :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x \in E_1 \\ \varphi_2(x) & \text{si } x \in E_2 \end{cases} \end{array}.$$

Montrer que l'application φ est une bijection.

Partie II - Application croissante pour l'inclusion

Si X et Y sont des ensembles quelconques, on dit qu'une application $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ est croissante pour l'inclusion si :

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{P}(X)^2, \quad A_1 \subset A_2 \Longrightarrow \Phi(A_1) \subset \Phi(A_2).$$

De manière analogue, on définit la décroissance en remplaçant $\Phi(A_1) \subset \Phi(A_2)$ par $\Phi(A_1) \supset \Phi(A_2)$.

1) Montrer que l'application $\begin{array}{c}[\\ ]\end{array}\!\rightarrow f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f[A] \end{array}$ est croissante pour l'inclusion.
2) Montrer que l'application complémentaire $C_E : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & E \setminus A \end{array}$ est décroissante pour l'inclusion.
3) Montrer que l'application $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & E \setminus g\big[F \setminus f[A]\big] \end{array}$ est croissante pour l'inclusion.

Partie III - Théorème de point fixe

Dans cette partie on considère $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante au sens de l'inclusion.
Nous allons démontrer que Φ admet un point fixe dans $\mathcal{P}(E)$ c'est-à-dire

$$\exists M \in \mathcal{P}(E), \quad \Phi(M) = M.$$

On considère l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(E) \ / \ A \subset \Phi(A)\}.$$

1) Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I. Montrer que

$$\bigcup_{i \in I} \Phi(A_i) \subset \Phi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

2) Justifier que $\mathcal{S}$ est une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.
3) On considère l'ensemble $M = \displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$.
   - -a- Montrer que $M \in \mathcal{S}$.
   - -b- Montrer que : $\forall A \in \mathcal{S}$, $\Phi(A) \in \mathcal{S}$.
   - -c- En déduire que : $\Phi(M) = M$.

Partie IV - Théorème de Cantor-Bernstein

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications injectives.
On utilisera les résultats des parties précédentes.

1) Montrer qu'il existe une partie $M \in \mathcal{P}(E)$ telle que

$$M = E \setminus g\big[\,F \setminus f[M]\,\big].$$

2) Montrer que : $\forall x \in E \setminus M, \ x \in g[F]$.
3) On définit l'application

$$h : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M \\ (\widetilde{g})^{-1}(x) & \text{si } x \in E \setminus M \end{cases} \end{array}.$$

   Montrer que h est bien définie puis qu'elle est bijective.

Problème 2 - Formule de Stirling

Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{n!\, \mathrm{e}^n}{n^n \sqrt{n}}.$$

Le but du problème est de démontrer que cette suite est convergente, puis de calculer explicitement la valeur de la limite. Les deux parties sont néanmoins indépendantes.

A. Des suites et des intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = \ln\left(\frac{1}{a_n}\right) \quad \text{et} \quad c_n = b_n + \frac{1}{2n}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \int_1^n \ln(x)\,dx - \ln(n!) + \frac{1}{2}\ln(n) - 1.$$

2) *Relations utiles.* Soit $n \in \mathbb{N}$.

-a- Montrer que :

$$b_{n+1} - b_n = \int_0^1 \ln(t+n)\,dt - \frac{\ln(n+1) + \ln(n)}{2}.$$

-b- En intégrant par parties, en déduire les égalités :

$$b_{n+1} - b_n = -\int_0^1 \frac{t - \frac{1}{2}}{t+n}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+n)^2}\,dt.$$

-c- Établir finalement l'encadrement :

$$0 \leqslant b_{n+1} - b_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

3) *Convergence.*

-a- Montrer que les suites (b_n) et (c_n) sont adjacentes.

-b- Prouver finalement que la suite (a_n) converge vers un certain réel $C > 0$.

B. Calcul de la limite

Dans la partie A, on a montré l'existence d'un réel $C > 0$ tel que la suite (a_n) converge vers C. Autrement dit :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\,\frac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}.$$

1) À tout entier $n \in \mathbb{N}$, on associe $u_n = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

-a- Déterminer, en fonction de C, un réel D tel que $u_n \sim \dfrac{D}{\sqrt{n}}$ lorsque $n \to +\infty$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n}\,dx.$$

2) À tout entier $n \in \mathbb{N}$, on associe

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^n\,dx.$$

-a- Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

-b- En déduire que $W_{2n+1} \sim W_{2n} \sim \dfrac{D}{\sqrt{n}}$ lorsque $n \to +\infty$.

3) On admet la relation de récurrence suivante, qui découle d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n.$$

-a- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (n+1)\,W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$.

-b- Déterminer finalement la valeur de C.