MPSI/MP2I – Devoir Surveillé 4

Samedi 7 décembre

Corrigé

Exercice 1

1) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme et produit de fonctions usuelles qui le sont. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$f_n'(x) = -nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} + x^n\mathrm{e}^{-x} = x^{n-1}(x-n)\mathrm{e}^{-x}$$
On en déduit le tableau de signes de f_n' et de variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$ suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	1	$\searrow$	$1-n^n\mathrm{e}^{-n}$	$\nearrow$	1

Puisque par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$, alors par combinaison linéaire $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

2) On sait que $n \geqslant 3$ et que $\mathrm{e} < 3$. Donc $n^n \geqslant 3^n$ et $\mathrm{e}^n < 3^n$ (par croissance stricte de $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$) donc $\mathrm{e}^{-n} > 3^{-n}$ puis $n^n\mathrm{e}^{-n} > 3^n \times 3^{-n}$ (produit de nombres strictement positifs), *i.e.* $n^n\mathrm{e}^{-n} > 1$. On en déduit donc que :
$$\boxed{1-n^n\mathrm{e}^{-n} < 0}.$$

3) — La fonction f_n est continue sur l'intervalle $]1,n]$ et elle y est strictement décroissante d'après ce qui précède. D'après le théorème de la bijection monotone, la fonction f_n réalise une bijection de $]1,n]$ sur l'intervalle $f_n(]1,n]) = [f_n(n), f_n(1)\,[$. Or $f_n(1) = 1-\mathrm{e}^{-1} > 0$ et $f_n(n) < 0$ (question précédente) donc $0 \in f_n([1,n])$. Ainsi, il existe un unique nombre $u_n \in]\,1,n]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
— Le même raisonnement sur l'intervalle $[n,+\infty[$ conduit à l'existence et à l'unicité d'un réel $v_n \in [n,+\infty\,[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.
— Sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction f_n est à valeurs strictement positives donc elle ne s'y annule pas.
Finalement :
$$\boxed{\text{l'équation } (E_n) \text{ admet exactement deux solutions positives } u_n \text{ et } v_n \text{ telles que } 1 < u_n \leqslant n \leqslant v_n}.$$

4) Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $v_n \geqslant n$. En appliquant le théorème de comparaison, on a :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}.$$

Partie B : Étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant3}$

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4 .
   -a- On a $f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1}^n\mathrm{e}^{-u_{n-1}}$. Or $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ donc $u_{n-1}^{n-1}\mathrm{e}^{-u_{n-1}} = 1$. Par conséquent,
$$\boxed{f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1} \times u_{n-1}^{n-1}\mathrm{e}^{-u_{n-1}} = 1-u_{n-1}}.$$
   -b- On sait que $f_n(u_{n-1}) = 1-u_{n-1}$. Or $u_{n-1} > 1$ d'après la question 3. (puisque $n-1 \geqslant 3$) donc :
$$\boxed{f_n(u_{n-1}) < 0}.$$

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4 . On sait que $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(u_{n-1}) < 0$. On en déduit que $f_n(u_{n-1}) \leqslant f_n(u_n)$. Or la fonction f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[1,n]$, qui contient les nombres u_n et u_{n-1} car $u_{n-1} \leqslant n-1 \leqslant n$, donc $u_{n-1} \geqslant u_n$. On en conclut donc que : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant3} \text{ est décroissante}}$.

3) La suite $(u_n)_{n\geqslant3}$ est décroissante et minorée (par 1) donc $\boxed{\text{converge d'après le théorème de la limite monotone.}}$

4) -a- $*$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 . Comme u_n est solution de (E_n), on a $u_n^n = \mathrm{e}^{u_n}$. Ainsi :

$$\boxed{u_n = \left(\mathrm{e}^{u_n}\right)^{1/n} = \mathrm{e}^{u_n/n}}.$$

$*$ Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente, on a par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, il vient (par continuité de la fonction exponentielle en 0 et d'après la caractérisation séquentielle de la continuité) :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{u_n}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

soit $\boxed{\ell = 1}$.

-b- Soit un entier $n \geqslant 3$.
Méthode 1. A l'aide d'équivalents.

$$n\left(u_n - 1\right) = n\left(\mathrm{e}^{\frac{u_n}{n}} - 1\right) \sim n\frac{u_n}{n} = u_n.$$

On a utilisé l'équivalent usuel $\mathrm{e}^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ et $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient $\boxed{n\left(u_n - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

Méthode 2. A l'aide de limite usuelle.

$$n\left(u_n - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{u_n}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = u_n\frac{\mathrm{e}^{\frac{u_n}{n}} - 1}{\frac{u_n}{n}} \quad (\text{licite car } u_n \neq 0)$$

Or $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$. Comme $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a d'après la caractérisation séquentielle de la limite :

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{u_n}{n}} - 1}{\frac{u_n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Enfin, on sait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc, par produit de limites,

$$\boxed{n\left(u_n - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Exercice 2

1) -a- Pour x dans $[0, \pi]$, on sait que $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et que $\sin x \leqslant x$. Il en découle :

$$0 \leqslant x - \sin x \leqslant x - \sin^3 x \leqslant x \leqslant \pi.$$

Ainsi, pour tout x de $[0, \pi]$, $f(x)$ est aussi dans $[0, \pi]$, autrement dit $[0, \pi]$ est stable par f.

-b- Soit maintenant x dans $[\pi, 2\pi]$. En notant $t = 2\pi - x$, on a $x = 2\pi - t$ et $t \in [0, \pi]$.
Alors $f(x) = (2\pi - t) - \sin^3(2\pi - t) = 2\pi - t + \sin^3 t = 2\pi - f(t)$
Et comme on a $f(t) \in [0, \pi]$ selon le a), on a $f(x) \in [\pi, 2\pi]$.
Il en découle que l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ est stable par f.

2) • Supposons $u_0 \in [0, \pi]$. Alors comme $[0, \pi]$ est stable par f, la suite (u_n) est à valeurs dans cet intervalle.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a donc $u_{n+1} - u_n = -\sin^3 u_n \leqslant 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante. Minorée par 0, elle converge, et sa limite ℓ vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant u_0 \leqslant \pi$.
Comme le passage à la limite dans « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \sin^3 u_n$ » donne $\ell = \ell - \sin^3 \ell$, on a donc $\sin \ell = 0$, ce qui impose que $\ell = 0$ ou $\ell = \pi$.
Si $u_0 < \pi$, on a $\ell = 0$ puisque $\ell \leqslant u_0$, et si $u_0 = \pi$, il est immédiat que (u_n) est constante égale à π, donc $\ell = \pi$.

• Supposons maintenant $u_0 \in]\pi, 2\pi]$. Alors comme $[\pi, 2\pi]$ est stable par f, la suite (u_n) est à valeurs dans cet intervalle et on a donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\sin^3 u_n \geqslant 0$.
La suite (u_n) est donc croissante. Majorée par 2π, elle converge, et sa limite ℓ vérifie $\pi < u_0 \leqslant \ell \leqslant 2\pi$ et $\sin \ell = 0$, d'où $\ell = 2\pi$.

Conclusion : si $0 \leqslant u_0 < \pi$, la suite (u_n) converge vers 0, si $u_0 = \pi$, la suite constante (u_n) converge vers π, et si $\pi < u_0 \leqslant 2\pi$, la suite (u_n) converge vers 2π.

3) -a- Tout d'abord, un petit raffinement de la réponse à 1) -a- montre que l'intervalle $]0,\pi[$ est stable par f. En effet, pour x dans $]0,\pi[$, on sait que $\sin x < x$, et il en découle : $0 < x - \sin x \leqslant x - \sin^3 x \leqslant x < \pi$.

Notre suite est ainsi à valeurs dans $]0,\pi[$ donc elle ne s'annule pas, et selon le 2), elle converge vers 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Observons que $v_n = \dfrac{1}{f(u_n)^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, pour tout réel $x \in]0,\pi[$,

$$\frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-f(x))(x+f(x))}{x^2 f(x)^2} = \frac{x\,\sin(x)^3\left(2 - \frac{\sin(x)^3}{x}\right)}{x^4\left(1-\frac{\sin(x)^3}{x}\right)}.$$

Lorsque $x \to 0$, l'équivalent usuel $\sin(x) \sim x$ donne $\dfrac{\sin(x)^3}{x} \sim \dfrac{x^3}{x} = x^2$, en particulier $\dfrac{\sin(x)^3}{x} \to 0$.
De même $\dfrac{x\sin(x)^3}{x^4} \sim \dfrac{x^4}{x^4} = 1$, donc $\dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Par composition de limites, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

-b- Selon le résultat sur les moyennes de Cesàro, la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ tend alors vers 2.
Or par télescopage, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}$.
Donc $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2}\right) \to 2$, donc $\dfrac{1}{nu_n^2} \to 2$, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{u_n^2} \sim 2n$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ (car $u_n > 0$).

Problème 1

Partie I - Préliminaire

1) Soit $g : F \to E$ injective.

-a- On pose $\begin{array}{rccc} \widetilde{g}: & F & \to & g[F] \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$.
On montre que $\widetilde{g}$ est bijective en montrant qu'elle est injective et surjective.
Injectivité. Soit $(y,y') \in F^2$ tel que $\widetilde{g}(y) = \widetilde{g}(y')$ alors $g(y) = g(y')$ et donc $y = y'$ par injectivité de g. D'où l'injectivité voulue de $\widetilde{g}$.
Surjectivité. Soit $x \in g[F]$, posons $y \in F$ tel que $x = g(y)$. Alors par définition de $\widetilde{g}$, $g(y) = \widetilde{g}(y)$. D'où la surjectivité voulue de $\widetilde{g}$.
Conclusion : $\boxed{\widetilde{g} \text{ est bijective}}$.

-b- Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. On montre l'égalité voulue, par double inclusion.

Soit $x \in g[F \setminus B]$, posons alors $y \in F \setminus B$ tel que $x = g(y)$. Comme $y \in F$ on déjà, $x \in g[F]$.
Puis par l'absurde, supposons que $x \in g[B]$ alors posons $b \in B$ tel que $x = g(b)$. Comme on a aussi, $x = g(y)$, l'injectivité de g donne $y = b$ et donc $y \in B$, ce qui contredit $y \in B \setminus F$.
C'est donc que $x \notin g[B]$.
D'où la première inclusion : $g[F \setminus B] \subset g[F] \setminus g[B]$.
Inversement, soit $x \in g[F] \setminus g[B]$. Donc $x \in g[F]$ et $x \notin g[B]$, donc il existe $y \in F$ tel que $x = g(y)$.
Or $y \in B$ impliquerait $x \in g[B]$). Donc $y \in F \setminus B$, il s'ensuit que $x \in g[F \setminus B]$.
D'où la deuxième inclusion : $g[F] \setminus g[B] \subset g[F \setminus B]$.
L'égalité voulue est démontrée : $\boxed{g[F \setminus B] = g[F] \setminus g[B]}$.

2) **Méthode 1** : on pose $\begin{array}{rccc} \psi: & F & \to & E \\ & y & \mapsto & \begin{cases} \varphi_1^{-1}(y) & \text{si } y \in F_1 \\ \varphi_2^{-1}(y) & \text{si } y \in F_2 \end{cases} \end{array}$. Alors $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_F$.
En effet, soit $x \in E$. Si $x \in E_1$, alors $\varphi_1(x) \in F_1$, donc

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi_1(x)) = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(x)) = x.$$

De même si $x \in E_2$,

$$(\psi \circ \varphi)(x) = x.$$

Donc $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$. Par un raisonnement analogue, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_F$.
Donc par caractérisation des bijections, $\boxed{\varphi \text{ est bijective}}$.
Méthode 2 : on montre que φ est injective et surjective.

Injectivité. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$.
Si $x, x' \in E_1$. Alors $\varphi_1(x) = \varphi_1(x')$ et donc $x = x'$ par injectivité de φ_1.
Si $x, x' \in E_2$. De même par injectivité de φ_2, $x = x'$.
Si $x \in E_1$ et $x' \in E_2$. Alors $\varphi(x) = \varphi_1(x) \in F_1$ et $\varphi(x') = \varphi_2(x') \in F_2$. Donc $\varphi(x) \in F_1 \cap F_2$, ce qui est absurde car F_1 et F_2 sont disjoints.
On obtient la même absurdité si $x \in E_2$ et $x' \in E_1$. On a donc bien : $x = x'$. D'où, φ est injective.

Surjectivité. Soit $y \in F$.
Si $y \in F_1$, posons $x = \varphi_1^{-1}(y) \in E_1$ alors $y = \varphi_1(x) = \varphi(x)$.
Si $y \in F_2$, posons $x = \varphi_2^{-1}(y) \in E_2$ alors $y = \varphi_2(x) = \varphi(x)$.
Donc φ est surjective.
Donc, $\boxed{\varphi \text{ est bijective}}$.

Partie II - Application croissante pour l'inclusion

1) Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A_1 \subset A_2$. Montrons que $f[A_1] \subset f[A_2]$.
Soit $y \in f[A_1]$, posons $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$. Or $A_1 \subset A_2$ donc $x \in A_2$ d'où $f(x) \in f[A_2]$.
Donc $\boxed{\overset{[}{]}\rightarrow f \text{ est bien croissante pour l'inclusion}}$.
2) Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A_1 \subset A_2$. Montrons que $E \setminus A_2 \subset E \setminus A_1$.
Par contraposée :
$$[x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2] \Leftrightarrow [x \notin A_2 \Rightarrow x \notin A_1].$$
D'où l'inclusion voulue. $\boxed{\text{L'application complémentaire } C_E \text{ est bien décroissante pour l'inclusion}}$.

3) Les résultats précédents s'étendent clairement aux applications $\overset{[}{]}\rightarrow g : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ et $C_F : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(F)$ définies de façons analogues.
On a $\Psi = C_E \circ \overset{[}{]}\rightarrow g \circ C_F \circ \overset{[}{]}\rightarrow f$. Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A_1 \subset A_2$.
On utilise successivement la croissance de $\overset{[}{]}\rightarrow f$, la décroissance de C_F, la croissance de $\overset{[}{]}\rightarrow g$, la décroissance de C_E :
$$\begin{aligned}
A_1 \subset A_2 &\Rightarrow \overset{[}{]}\rightarrow f(A_1) \subset \overset{[}{]}\rightarrow f(A_2) \\
&\Rightarrow F \setminus \overset{[}{]}\rightarrow f(A_2) \subset F \setminus \overset{[}{]}\rightarrow f(A_1) \\
&\Rightarrow \overset{[}{]}\rightarrow g\left(F \setminus \overset{[}{]}\rightarrow f(A_2)\right) \subset \overset{[}{]}\rightarrow g\left(F \setminus \overset{[}{]}\rightarrow f(A_1)\right) \\
&\Rightarrow E \setminus \overset{[}{]}\rightarrow g\left(F \setminus \overset{[}{]}\rightarrow f(A_1)\right) \subset E \setminus \overset{[}{]}\rightarrow g\left(F \setminus \overset{[}{]}\rightarrow f(A_1)\right) \\
&\Rightarrow \Psi(A_1) \subset \Psi(A_2).
\end{aligned}$$
Donc $\boxed{\Psi \text{ est bien croissante pour l'inclusion}}$.

Partie III - Théorème de point fixe

1) Posons $A' = \bigcup_{i \in I} A_i$. Soit $i \in I$, on a clairement :
$$A_i \subset A'.$$
Donc par croissance de Φ,
$$\Phi(A_i) \subset \Phi\left(A'\right).$$

Donc par union de parties de $\Phi(A')$,

$$\bigcup_{i\in I} \Phi(A_i) \subset \Phi\left(A'\right)$$

ce qui donne comme voulu

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} \Phi(A_i) \subset \Phi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)}.$$

2) L'ensemble vide est contenu dans toute partie de E donc vérifie $\emptyset \subset \Phi(\emptyset)$ donc $\emptyset \in \mathcal{S}$ donc $\boxed{\mathcal{S} \text{ est non vide}}$

3) On considère l'ensemble $M = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{S}} A$.

-a- Tout d'abord, par définition de $\mathcal{S}$,

$$\forall A \in \mathcal{S}, \quad A \subset \Phi(A).$$

Donc, en prenant la réunion sur A :

$$M = \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A \subset \bigcup_{A\in\mathcal{S}} \Phi(A).$$

Or, d'après III-1),

$$\bigcup_{A\in\mathcal{S}} \Phi(A) \subset \Phi\left(\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A\right) = \Phi(M).$$

Par transitivité de l'inclusion, on obtient

$$M \subset \Phi(M) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{M \in \mathcal{S}}.$$

-b- Soit $A \in \mathcal{S}$ alors $A \subset \Phi(A)$. Par croissance de Φ, cela entraîne $\Phi(A) \subset \Phi(\Phi(A))$. Donc $\boxed{\Phi(A) \in \mathcal{S}}$.

-c- III-3)-a, prouve $M \subset \Phi(M)$.
On prouve l'autre inclusion.
D'après III-3)-a-), $M \in \mathcal{S}$, on peut donc prendre $A = M$ dans III-3)-b-, pour obtenir $\Phi(M) \in \mathcal{S}$.
Or $M = \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A$ donc $\Phi(M)$ qui est élément de $\mathcal{S}$ est une partie A de la réunion, donc $\Phi(M) \subset M$.
Les deux inclusions prouvent $\boxed{\Phi(M) = M}$.

Partie IV - Théorème de Cantor-Bernstein

1) D'après II-3), Ψ est croissante pour l'inclusion. Donc d'après III-3)-c-, Ψ admet un point fixe $M \in \mathcal{P}(E)$, c'est -à dire :

$$\boxed{M = \Psi(M) = E \setminus g\big[F \setminus f[M]\big]}.$$

2) Soit $x \in E \setminus M$. Alors d'après I-1) que l'on passe au complémentaire

$$E \setminus M = g\big[F \setminus f[M]\big].$$

Donc $x \in g\big[F \setminus f[M]\big]$.
En prenant $B = f[M]$ dans I-1)-b-, on en déduit que $x \in g[F] \setminus g\big[f[M]\big]$. En particulier $\boxed{x \in g[F]}$.

3) Montrons que h est bien définie.
Comme $M \subset E$, lorsque $x \in E$, $f(x)$ a bien un sens.
D'après IV-2), si $x \in E \setminus M$, alors $x \in g[F]$ donc $\widetilde{g}^{-1}(x)$ a un sens car $\widetilde{g} : F \to g[F]$ est bijective d'après I-1)-a-.
Donc h est bien définie.
Puis pour prouver la bijectivité de h, on cherche à appliquer I-2) avec :
— $E_1 = M$ et $E_2 = E \setminus M$ deux parties disjointes dont la réunion est E ;
— $F_1 = f[M]$ et $F_2 = F \setminus f[M]$ deux parties disjointes dont la réunion est F.
Par une démonstration similaire à celle de I-1)-a-, les applications suivantes sont des bijections :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} M & \to & f[M] \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}, \qquad g_2 : \begin{array}{ccc} F \setminus f[M] & \to & \widetilde{g}\big[F \setminus f[M]\big] \\ x & \mapsto & \widetilde{g}(x). \end{array},$$

Or $\widetilde{g}\big[F \setminus f[M]\big] = g\big[F \setminus f[M]\big] = E \setminus M$ (d'après IV-1), donc g_2^{-1} est une bijection de $E \setminus M$ dans $F \setminus f[M]$ telle que $g_2^{-1}(x) = \widetilde{g}^{-1}(x)$ lorsque $x \in E \setminus M$.
On applique alors I-2), avec l'application f_1 ci-dessus et $f_2 = g_2^{-1}$. Donc $\boxed{h \text{ est bijective}}$.

Problème 2

A. Des suites et des intégrales

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les règles de calcul de ln, on obtient d'une part :

$$\begin{aligned} b_n &= \ln(n^n) + \ln(\sqrt{n}) - \ln(n!) - \ln(e^n) \\ &= n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n) - \ln(n!) - n. \end{aligned}$$

D'autre part, une primitive usuelle de ln donne directement :

$$\int_1^n \ln(x)\,dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1,$$

ce qui permet de conclure.

2) *Relations utiles.*

-a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule précédente au rang $n+1$ donne :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \int_1^{n+1} \ln(x)\,dx - \ln((n+1)!) + \frac{1}{2}\ln(n+1) - 1 \\ &= \int_1^n \ln(x)\,dx + \int_n^{n+1} \ln(x)\,dx - \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n+1) - 1, \end{aligned}$$

car $\ln((n+1)!) = \ln(n!) + \ln(n+1)$. Et il vient donc par différence :

$$b_{n+1} - b_n = \int_n^{n+1} \ln(x)\,dx - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln(n).$$

On conclut en effectuant le changement de variable affine $x = t + n$ dans l'intégrale.

-b- On intègre par parties en considérant les fonctions $u : t \mapsto t - \frac{1}{2}$ et $v : t \mapsto \ln(t+n)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(t+n)\,dt &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,dt \\ &= \left[(t-\tfrac{1}{2})\ln(t+n)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+n}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+n) + \frac{1}{2}\ln(n) - \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+n}\,dt, \end{aligned}$$

d'où la première égalité. Pour la seconde, on intègre par parties à nouveau :

$$\int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+n}\,dt = \left[\frac{\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}}{t+n}\right]_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}}{(t+n)^2}\,dt.$$

On conclut en observant que le crochet s'annule, tandis que $\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} = -\frac{1}{2}t(1-t)$.

-c- Pour tout réel $t \in [0,1],\ 0 \leqslant t(1-t) \leqslant 1$. Par intégration des inégalités, on en déduit que :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{0}{(t+n)^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+n)^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t+n)^2}\,dt.$$

Le membre de gauche est nul et on reconnaît au milieu $b_{n+1} - b_n$. À droite enfin,

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+n)^2}\,dt = \left[\frac{-1}{t+n}\right]_0^1 = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

3) *Convergence.*

-a- La partie gauche de l'encadrement ci-dessus montre que $b_{n+1} - b_n$ est positif quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante. Pour la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ on calcule de même :

$$c_{n+1} - c_n = b_{n+1} - b_n - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right),$$

ce qui est négatif d'après la partie droite de l'encadrement. La suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante. Il reste seulement à vérifier la condition de limite nulle :

$$b_n - c_n = -\frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

-b- D'après le théorème des suites adjacentes, (b_n) et (c_n) sont convergentes et de même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Mais alors :

$$a_n = e^{-b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\ell}$$

par continuité de l'exponentielle. D'où le résultat en posant $C = e^{-\ell}$.

B. Calcul de la limite

1) -a- Soit $n \in \mathbb{N}$. L'équivalent de la factorielle aux rangs n et $2n$ donne :

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \sim \frac{C\,(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{4^n \mathrm{e}^{2n}} \frac{(\mathrm{e}^n)^2}{(C\,n^n\sqrt{n})^2} = \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{n}}.$$

D'où le résultat attendu pour u_n en posant $D = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}\,C}$.

-b- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par formule d'Euler et binôme de Newton :

$$\cos(x)^{2n} = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^{2n}}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{2n-k}(e^{-\mathrm{i}x})^k = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(n-k)x}.$$

Par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie réelle :

$$\cos(x)^{2n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\cos\left(2(n-k)x\right).$$

Notons $(I_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ la famille d'intégrales définie par :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2}\cos(0)dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_p = \int_0^{\pi/2}\cos(2px)dx = \frac{\sin(p\pi) - \sin(0)}{2p} = 0 \quad \text{si } p \in \mathbb{Z}^*.$$

On obtient par linéarité de l'intégrale une somme dont un seul terme n'est pas nul (pour $k = n$) :

$$\int_0^{\pi/2}\cos(x)^{2n}dx = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}I_{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}I_0 = u_n.$$

2) -a- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\cos|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ est à valeurs dans $[0,1]$ donc :

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad \cos(x)^n \geqslant \cos(x)^{n+1}.$$

Par intégration des inégalités, on en déduit que $W_n \geqslant W_{n+1}$. La suite (W_n) est donc décroissante.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance,

$$W_{2n} \geqslant W_{2n+1} \geqslant W_{2(n+1)}, \quad \text{d'où} \quad 1 \geqslant \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \geqslant \frac{W_{2(n+1)}}{W_{2n}} \quad \text{car } W_{2n} > 0.$$

D'après les questions 1)-a- et 1)-b-, on observe que :

$$\frac{W_{2(n+1)}}{W_{2n}} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\frac{W_{2(n+1)}}{W_{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{2n}.$$

3) -a- La relation de récurrence admise donne, pour tout entier n,

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n.$$

La suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.$$

Pour conclure, il reste à calculer W_1W_0 :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$. Au rang $2n$, la relation précédente devient $(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}$.
Or, d'après nos équivalents établis en 2)-b- :

$$(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} \sim 2n\left(\frac{D}{\sqrt{n}}\right)^2 = 2D^2.$$

Par unicité de la limite, on a donc $\dfrac{\pi}{2} = 2D^2$, d'où $D = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et finalement $C = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}\,D} = \sqrt{2\pi}$.