Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Exercice 1. (♡) Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(t) = t^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} & \text{si } t \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
Étudier la continuité, la dérivabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction f.

Exercice 2. (♡) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$.

Exercice 3. (♡) Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $\begin{array}{rccc} h : & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$

1) en revenant à la définition
2) en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 4. (♡) Soient f, g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par: $f(x) = x \ln x$ $\qquad g(x) = x^2 \ln x$.

1) Étudier la continuité, la dérivabilité, la classe de f et g.
2) Montrer que ces deux fonctions admettent un prolongement par continuité en 0. On notera encore f, g ces prolongements.
3) Ces prolongements sont-ils dérivables en 0? Ces prolongements sont-ils de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. $(*)$ Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a.
Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$.

Dérivées successives

Exercice 6. (♡) A près avoir justifié leur existence, calculer les dérivées successives des fonctions définies par

1) $f(x) = (2x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{e}^{3x}$
2) $f(x) = \ln(1 - x^2)$
3) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x$ $\quad [\cos x = \mathrm{Re}(\ldots)]$

Exercice 7. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{2n}$ et $g_n = f_n^{(n)}$.

1) Calculer $g_n(x)$ de deux manières:
   -a- en dérivant n fois x^{2n}
   -b- en appliquant la formule de Leibniz à $x^n \times x^n$.
2) En comparant les deux résultats, obtenir une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 8. $(**)$ On pose $f(x) = \begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème de Rolle, accroissements finis

Exercice 9. ($\heartsuit$) Soit$f$ une fonction réelle dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et $f(1)f'(1)<0$.
Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 10. ($*$) Soit$f$ une fonction réelle dérivable sur $[0,1]$ telle que $f'(0)<0$ et $f'(1)>0$.
Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.

1) Comment prouver rapidement le résultat lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$?

2) Montrer le résultat lorsque f est seulement dérivable sur $[0,1]$.

Exercice 11. ($\heartsuit$)- Rolle en cascade Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^k$ sur I (où $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$). On suppose que f s'annule exactement k fois sur l'intervalle I.
Montrer que $f^{(k-1)}$ s'annule au moins 1 fois sur I.

Exercice 12. ($*$) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, $P_n(x)=(x^2-1)^n$. Montrer que $P_n^{(n)}$ s'annule exactement n fois sur $[-1,1]$.

Exercice 13. ($*$)- Rolle généralisé
Soit $f:[a,+\infty[\to+\infty$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(a)=\lim\limits_{+\infty} f$.
Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 14. ($*$)- Rolle généralisé
Soit $l\in\mathbb{R}$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=l.$$

Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 15. ($*$) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et soit $c\in]a,b[$.
Montrer qu'il existe $\gamma\in]a,b[$ tel que

$$f(c)=\frac{(c-a)(c-b)}{2}f''(\gamma).$$

[On pourra introduire $h:x\mapsto f(x)-\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)$].

Exercice 16. ($\heartsuit$) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a,b]$ telles que:

$$f(a)=g(a)\qquad f(b)=g(b)\qquad \forall x\in[a,b],\quad f''(x)\leqslant g''(x).$$

Montrer que: $\forall x\in[a,b]$, $g(x)\leqslant f(x)$.

Exercice 17. ($*$) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $x>0$, il existe $c>0$ tel que $f(x)-f(-x)=x(f'(c)+f'(-c))$.

Exercice 18. ($**$) Soient $a\in\mathbb{R}$, $h>0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,a+2h]$.
Montrer que : $\exists c\in]a,a+2h[/f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)=h^2f''(c)$. *[On pourra introduire la fonction $\varphi:x\mapsto f(x+h)-f(x)$].*

Exercice 19. ($*$)
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et f, g deux fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que pour tout $x\in]a,b[$, $g'(x)\neq 0$.
Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 20. ($**$) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et $f'>0$ sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un réel $m>0$ tel que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant mx$.

Exercice 21. ($\heartsuit$) Montrer que: $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arctan} x < x$.

Exercice 22. ($\heartsuit$) Montrer que: $\quad \forall (x,y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]^2, \quad |\tan x - \tan y| \leqslant 2|x-y|$.

Exercice 23. ($\heartsuit$) Montrer que: $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ |\operatorname{sh}(x)| \geqslant |x|$.

Exercice 24. ($\heartsuit$) Estimer l'erreur commise dans l' approximation suivante $\sqrt{10001} \approx 100$.

Exercice 25. ($\heartsuit$)
On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $f(x) = \dfrac{3}{4}\cos x$.

1) Montrer que f admet un unique point fixe α. Vérifier que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
2) -a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.
   -b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$.
   -c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ puis que la suite $(u_n)_n$ converge vers α.
3) Pour quelle valeur de n peut-on affirmer que le terme u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Parce qu'il reste de la place...

Exercice 26. ($*$) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(2x) = 2f(x). \qquad \textit{[Poser } g(x) = \tfrac{f(x)}{x},\ g(0) = ??\textit{]}$$