**Exercice 10**. $(*)$ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (x^2-1)^n$. Montrer que $P_n^{(n)}$ s'annule exactement $n$ fois sur $[-1,1]$.

**Correction -** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrons tout d'abord que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(-1) = 0$ et $P_n^{(k)}(1) = 0$.
  **Méthode 1** : avec des connaissances sur les polynômes, c'est rapide, $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ donc $-1$ et $1$ sont des racines de $(X^2-1)^n$ de multiplicité $n-1$, on utilise alors la caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées.
  **Méthode 2**: on utilise la formule de Leibniz. On réécrit $P_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ pour en calculer les dérivées successives à l'aide la formule de Leibniz. La fonction $P_n$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = (x-1)^n$ et $v(x) = (x+1)^n$, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$
  $$u^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \qquad v^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}.$$
  Soient $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $x \in \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned} P_n^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(j)}(x) v^{(k-j)}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!}(x-1)^{n-j} \frac{n!}{(n-k+j)!}(x+1)^{n-k+j}. \end{aligned}$$
  Pour $0 \leqslant k < n$, $P_n^{(k)}(1) = 0$ car tous les exposants $n-j$ sont strictement positifs et donc $(x-1)^{n-j} = 0$, ainsi tous les termes de la somme sont nuls.
  De même $P_n^{(k)}(-1) = 0$, car tous les exposants $n-k+j$ sont strictement positifs et donc $(x+1)^{n-k+j} = 0$, ainsi tous les termes de la somme sont nuls.

- Pour montrer que $P_n^{(n)}$ s'annule $n$ fois, on applique plusieurs fois le théorème de Rolle.
  - $P_n$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et $P_n(-1) = P_n(1) (= 0)$. Donc, il existe $c_{1,1} \in ]-1,1[$ tel que $P_n'(c_{1,1}) = 0$.
  - Puis on applique de nouveau le théorème de Rolle (2 fois) à $P_n'$ sur $[-1, c_{1,1}]$ et sur $[c_{1,1}, 1]$ car $P_n'(-1) = P_n'(c_{1,1}) = P_n'(1) = 0$. Il existe alors $c_{2,1} \in ]-1, c_{1,1}[$ et $c_{2,1} \in ]c_{1,1}, 1[$ tels que $P_n''(c_{2,1}) = P_n''(c_{2,2}) = 0$.
  - On applique alors le théorème de Rolle (3 fois) à $P_n''$ sur $[-1, c_{2,1}]$, $[c2, 1, c_{2,2}]$ et sur $[c_{2,2}, 1]$....
  - On itère le procédé
  - La dérivée $n-1$-ième, $P_n^{(n-1)}$ s'annule en $-1$, $1$ et $n-1$ valeurs intermédiaires deux à deux distinctes $c_{n-1,1}, ..., c_{n-1,n-1}$. On applique alors le théorème de Rolle $n$ fois pour obtenir que $\boxed{P_n^{(n)} \text{ s'annule (au moins) } n \text{ fois sur } [-1,1]}$. Pour montrer qu'elle s'annule exactement $n$ fois, il faut utiliser un argument polynomial que l'on verra plus tard. $P_n$ est de degré $2n$, donc $P_n^{(n)}$ est de degré $n$, donc s'annule au plus $n$ fois. S'annulant aussi au moins $n$ fois, $\boxed{P_n^{(n)} \text{ s'annule alors exactement } n \text{ fois sur } [-1,1]}$.

**Exercice 12**. $(*)$ Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que $f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

**Correction -** Soit $x > 0$. Il s'agit de prouver l'existence de $c$ tel que : $f(x) - f(-x) - x(f'(c) + f'(-c)) = 0$.
On applique le théorème de Rolle à la fonction $\varphi : t \mapsto tf(x) - tf(-x) - x(f(t) - f(-t))$ sur l'intervalle $[-x, x]$. Toutes les hyptohèses sont à vérifier [....]

**Exercice 13**. $(**)$ Soient $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a+2h]$.
Montrer que : $\exists c \in ]a, a+2h[ / f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$. *[On pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x+h) - f(x)$].*

**Correction -** On pose $\varphi : x \mapsto f(x+h) - f(x)$. En appliquant le TAF à $\varphi$ sur $[a, a+h]$ [...hypothèses à vérifier...], posons $\alpha \in ]a, a+h[$ tel
$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(\alpha) = h(f'(\alpha+h) - f'(\alpha)).$$
Puis on applique le TAF à $f'$ sur $[\alpha, \alpha+h]$ [...hypothèses à vérifier...], posons $c \in ]\alpha, \alpha+h[$ tel
$$f'(\alpha+h) - f'(\alpha) = hf''(c).$$
On a donc $a < \alpha < c < \alpha + h < a + 2h$, et $\varphi(a+h) - \varphi(a) = h^2 f''(c)$, donc
$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

**Exercice 15**. $(**)$ Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f' > 0$ sur $[0,1]$.
Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant mx$.

**Correction -** $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc $f'$ est **continue** sur le **segment** $[0,1]$ donc $f'$ admet un minimum sur $[0,1]$ noté $m$. Comme $f' > 0$ alors $m > 0$.

Puis, fixons $x \in [0,1]$. Si $x=0$, l'inégalité $f(x) \geqslant mx$ est claire.
Si $x>0$, on applique le TAF à $f$ sur $[0,x]$, f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, posons alors $c \in ]0,x[$ tel que : $f(x)-f(0) = (x-0)f'(c) = xf'(c) \geqslant xm$ car $x \geqslant 0$ et $f' \geqslant m$. Et donc $f(x) \geqslant mx$.
On a donc bien, $\boxed{\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant mx.}$

**Exercice 17**. ($\heartsuit$) Montrer que: $\quad \forall (x,y) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]^2, \quad |\tan x - \tan y| \leqslant 2|x-y|.$

**Correction -** Classique en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction tan sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. La dérivée y est majorée par 2. *Détails et rédactions laissés au lecteur.*

**Exercice 18**. ($\heartsuit$) Montrer que: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{sh}(x)| \geqslant |x|.$

**Correction -** Classique en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction sh sur l'intervalle $[0,x]$ ou $[x,0]$ (le cas $x=0$ est trivial). Reste alors minorer.
On peut aussi se contenter de le prouver pour $x >$ par le TAF. Et faire le cas $x<0$ en prenant $-x>0$ et en appliquant le cas $x>0$. *Détails et rédactions laissés au lecteur.*

**Exercice 19**. ($\heartsuit$) Estimer l'erreur commise dans l' approximation suivante $\sqrt{10001} \approx 100$.

**Correction -** On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[10000, 10001]$. *Détails et rédactions laissés au lecteur.*

**Exercice 20**. ($\heartsuit$)
On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $f(x) = \dfrac{3}{4}\cos x$.

1) Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\alpha$. Vérifier que $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$.
2) -a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.
   -b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$.
   -c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ puis que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\alpha$.
3) Pour quelle valeur de $n$ peut-on affirmer que le terme $u_n$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

**Correction -** Incontournable, archi classique, l'étude de suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f$ contractante (càd $f$ $K$-lipschitzienne avec $K \in [0,1[$) : un exemple a été traité en cours.

**Exercice 21**. ($*$) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(2x) = 2f(x). \qquad \textit{[Poser } g(x) = \tfrac{f(x)}{x},\ g(0) = ??\textit{]}$$

**Correction -**

- **Analyse**. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 vérifiant: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f(2x) = 2f(x)$.
  En particulier avec $x=0$, $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.
  On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Alors $g$ est continue en 0, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
  $$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f'(0) = g(0) \text{ (on a utilisé que } f \text{ est dérivable en 0).}$$
  Notons enfin que:
  $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(2x) = \frac{f(2x)}{2x} = \frac{2f(x)}{2x} = g(x) \quad \text{(égalité également vraie en 0).}$$
  Par conséquent, $g$ est une fonction constante (ex. vu dans la fiche continuité). Donc il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = a \quad \text{i.e.} \quad f(x) = ax. \qquad \text{Donc } f \text{ est linéaire.}$$
- **Synthèse**. Posons $f : x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$. Alors $f$ est dérivable en 0 et:
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2ax = 2f(x).$$
  Donc $f$ est est solution du problème.
- **Conclusion**. $\boxed{\text{L'ensemble des fonctions cherchées est } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array} \ / \ a \in \mathbb{R} \right\}}$.