L'anneau des matrices

Exercice 1. (♡) Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots 1 & \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A_n^2 de deux façons :

1) directement
2) en écrivant $A = U - I$ où U est la matrice ne contenant que des 1.

Exercice 2. ($*$) Soient i, j, k, l quatre entiers de $[\![1, n]\!]^2$. On définit E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne contient que des 0 sauf en position (i, j) où il y a un 1. Calculer $E_{ij}E_{kl}$.

Exercice 3. (♡) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble, noté $C(A)$, des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 4. ($*$) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Matrices inversibles

Exercice 5. (♡) Calculer, quand c'est possible, l'inverse des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) par la méthode de résolution de systèmes
2) par la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 6. (♡) Pour quelle valeur de a la matrice suivante $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & a^3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

Exercice 7. (♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $(A - I_3)(A + 2I_3) = 0_3$.
2) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3) Justifier que $A - I_3$ et $A + 2I_3$ ne sont pas inversibles.

Exercice 8. ($*$) Soit N la matrice $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer N^3. En exploitant $N^3 + I_3$, montrer que $N + I_3$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 9. ($*$) Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 10. ($*$) Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse sous forme d'une matrice par blocs.

Calcul de puissance n-ième

Exercice 11. ($\heartsuit$) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ dans chaque cas suivant:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $(\theta \in \mathbb{R})$

4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 12. ($\heartsuit$) On définit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -2 \end{cases}$.
On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice A vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2) En déduire une expression de X_n en fonction de A^n et X_0.
3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4) Déterminer alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 13. ($\heartsuit$) On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. ($*$) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad P = \dfrac{1}{4}(A + I_3)$, $\quad Q = \dfrac{1}{4}(A - 3I_3)$.

1) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2) **En déduire** que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3) Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
4) Exprimer A puis, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de P et Q. Vérifier que cette relation est encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$.
On utilisera le fait que pour $n \in \mathbb{N}$, $A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = (A^n)^{-1}$.

Exercice 15. ($*$) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $AP = PD$.
2) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Exprimer alors A^n.

Exercice 16. $(*)$ *Suite de l'exercice 7.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer A^n où $n \in \mathbb{N}$.

1) **Méthode 1 :**

   -a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n I + b_n A$. On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   -b- Montrer que la suite $(a_n + b_n)$ est constante.

   -c- Donner alors l'expression de a_n et b_n en fonction de n. Puis le tableau matriciel de A^n.

2) **Méthode 2 :** à l'aide d'un polynôme annulateur de A.

Exercice 17 Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_n$.

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que AB et $A+B$ sont nilpotentes.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

Transposée - Trace

Exercice 18. $(*)$ Montrer que tout matrice carrée s'écrit d'une unique manière comme sommes d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 19. $(*)$ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose $M = A^\top A$.

1) Montrer que la matrice M est symétrique.

2) Déterminer les coefficients diagonaux de M en fonction de ceux de A.

3) En déduire que si M est nulle alors A est nulle.

Exercice 20. $(*)$

1) -a- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\mathrm{Tr}(AM) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est nulle.
   Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Que dire de A et B?

   -b- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0$ si et seulement si A est nulle.
   Le résultat est-il vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   -a- Montrer que : $\mathrm{Tr}((AB - BA)^\top (AB - BA)) = 2\left(\mathrm{Tr}(A^2B^2) - \mathrm{Tr}((AB)^2)\right)$.

   -b- En déduire que : $\mathrm{Tr}((AB)^2) \leqslant \mathrm{Tr}(A^2B^2)$.

3) Déduire de 1)-b- que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle $AA^\top = A^2$ est symétrique.

Exercice 21. $(**)$ Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'équation $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$.

Exercice 22. $(**)$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : A antisymétrique $\Leftrightarrow$ $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0$.