De nombreux exemples et applications directes du cours

Exercice 1. (♡)Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels? Dans l'affirmative, en donner une famille génératrice simple.

1) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -4x + 7y = 0\}$
2) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x + 2y = 5\}$
3) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant y\}$
4) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 5z = 0\}$
5) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x = y = 2z\}$
6) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4\}$
7) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - 2t = 0 \text{ et } -x + 2y + z - t = 0\}$

Exercice 2. (♡) Décrire les ensembles suivants par une ou des équations.

1) $\text{Vect}(u)$ où $u = (-2, 3)$
2) $\text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 2)$ et $v = (1, 2, 1)$.
3) $\text{Vect}(u)$ où $u = (1, -2, 3)$.
4) $\text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, -2, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1, 1)$.

Exercice 3. (♡) Chacun des cas suivants donner une famille génératrice plus simple de l'espace vectoriel F.

1) Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(a, b, c)$ où $a = (1, -1, 2)$, $b = (2, -1, 3)$, $c = (-1, 2, 0)$.
2) Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(a, b, c)$ où $a = (2, -3, 4)$, $b = (1, 0, -2)$, $c = (7, -6, 2)$.
3) Dans $\mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}(a, b, c, d)$ où $a = (1, -1, 1, 0)$, $b = (2, 1, 0, -1)$, $c = (0, -3, 2, 1)$, $d = (3, 3, -1, -2)$.

Exercice 4. (♡)Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels?

1) $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)_n \text{ converge}\}$
2) $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)_n \text{ converge vers } 3\}$
3) $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)_n \text{ décroissante}\}$
4) $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$

Exercice 5. (♡)Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels?

1) $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$
2) $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ croissante}\}$
3) $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ négative}\}$
4) $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \ f \text{ deux fois dérivable et } f'' - f = 0\}$

Exercice 6. (♡)Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$? En donner une famille génératrice si possible.

1) $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ \widetilde{P}(1) = 0\}$
2) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P = 4\}$
3) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P \leqslant 4\}$
4) $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ \widetilde{P}(2) = \widetilde{P}'(2) = 0\}$

Exercice 7. (♡)Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$? En donner une famille génératrice si possible.

1) $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
2) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ M^2 = M\}$
3) $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0_2\}$ où $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Sous-espaces vectoriels

Exercice 8. ($\heartsuit$) On définit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 0)$.

1) Déterminer une équation de G.
2) Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 9. ($\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer à l'aide d'un contre-exemple, qu'en général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2) Montrer que: $\qquad F \cup G$ sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice 10. ($*$) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite e^n par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $e^n_k = \delta_{kn}$.
Déterminer le sous-espace-vectoriel engendré par $\{e^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 11. ($**$) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sev de E. On pose $A = E \setminus F$.

1) Montrer que : $\forall x \in F$, $\forall y \in A$, $x + y \in A$.
2) En déduire que si $F \neq E$, alors $\text{Vect}(A) = E$.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 12. ($\heartsuit$) On définit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - 3z = 0\}$.

1) Montrer que F et G des sev de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
2) La somme $F + G$ est-elle directe?
3) Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 13. ($\heartsuit$) On définit $F = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, 1, 1, 1)$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0\}$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base
2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14. ($*$) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles convergentes, $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des suites réelles convergentes vers 0 et $\mathcal{C}_1$ l'ensembles des suites réelles constantes.

1) Montrer que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2) Montrer que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}$.

Exercice 15. ($*$) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \widetilde{P}(3) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{P}(5) = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2) Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16. ($*$) Soient $F = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \ / \ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \ / \ f \text{ constante}\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 17. ($**$) Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que si $F + H = G + H$, $F \cap H = G \cap H$ et $F \subset G$ alors $F = G$.

2) Montrer, à l'aide d'un contre-exemple que le résultat n'est plus valable si on enlève l'hypothèse $F \subset G$.

Familles libres, bases.

Exercice 18. ($\heartsuit$)Familles de $\mathbb{R}^3$

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées? Lesquelles sont des bases de $\mathbb{R}^3$? Dans le cas de base vous donnerez les coordonnées du vecteur $(1,-1,1)$ dans la base.

1) $u_1 = (2,-1,1)$, $u_2 = (3,0,1)$
2) $u_1 = (1,-1,2)$, $u_2 = (3,1,2)$, $u_3 = (2,-1,3)$
3) $u_1 = (1,-1,2)$, $u_2 = (3,1,-1)$, $u_3 = (-3,-5,8)$
4) $u_1 = (2,-1,-1)$, $u_2 = (1,0,3)$, $u_3 = (4,2,1)$, $u_4 = (0,2,-2)$

Exercice 19. ($\heartsuit$)Familles de $\mathbb{R}[X]$

Les familles suivantes de $\mathbb{R}_2[X]$ sont-elles libres ou liées? Lesquelles sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$? Dans le cas de base vous donnerez les coordonnées du vecteur X^2-1 dans la base.

1) $P_1 = X^2+3X-4$, $P_2 = 2X^2-5X+7$
2) $P_1 = 2X^2+5X-1$, $P_2 = -5X+7$, $P_3 = 7$
3) $P_1 = 3X^2-3X$, $P_2 = X+4$, $P_3 = -X^2-5X+1$, $P_4 = 2X^2-X+1$

Exercice 20. ($**$)Familles de $\mathbb{K}[X]$

Soient α et β dans $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $((X-\alpha)^k(X-\beta)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 21. ($**$)Familles de $\mathbb{R}[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient A et B deux polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constants et premiers entre eux.
Montrer que la famille $(A^kB^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 22. Famille de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$

1) ($\heartsuit$)Les familles suivantes de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ sont-elles libres ou liées?

   -a- $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_2 : x \mapsto |x-1|$, $f_3 : x \mapsto |x+1|$
   -b- $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \sin(2x)$, $f_3 : x \mapsto \sin(3x)$
   -c- $f_1 : x \mapsto \cos(2x)$, $f_2 : x \mapsto \cos^2 x$, $f_3 : x \mapsto 1$

2) ($*$)Montrer que la familles $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
3) ($*$)Montrer que la familles $(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 23. ($*$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit les vecteurs

$$a = 3e_1 + e_2 - e_3 \qquad b = e_1 - 2e_2 + e_3 \qquad c = e_2 - e_3 \qquad d = 4e_1 + 6e_2 - 4e_3.$$

1) La famille (a,b,c,d) est-elle une base de E?
2) La famille (a,b,c) est-elle une base de E? Si oui, préciser les coordonnées de e_1 dans cette base.
3) Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(a,b,d)$ puis sa dimension

Exercice 24. ($*$) On pose $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,3)$ et $w = (a,a^2,a^3)$ où $a \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.