Inégalité de convexité

Exercice 1. (♡) Montrer que: $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$

Exercice 2. (♡) Montrer que: $\forall x \in [0,1], \quad 1+x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x(\mathrm{e}-1).$

Exercice 3. (♡) Montrer que: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b\right).$

Exercice 4. (♡) Montrer que: $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}\left(a_1 + \cdots + a_n\right)^2.$

Exercice 5. (♡) Montrer que: $\forall t \in [0,1], \quad \forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2, \quad x^t y^{1-t} \leqslant tx + (1-t)y.$

Exercice 6. ($*$) Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \geqslant ab.$$

Exercice 7. ($*$) Montrer que

$$\forall (x,y) \in (]1,+\infty[)^2, \qquad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}.$$

Exercice 8. ($*$) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

1) Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.
2) En déduire: $\forall (a,b,x,y) \in (]0,+\infty[)^4, \quad x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{a} \geqslant (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$

Propriétés des fonctions convexes

Exercice 9. ($*$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante et non constante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 10. ($*$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 11. ($*$) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$ alors f admet un minimum global en a.

Exercice 12. ($**$) Déterminer les fonctions à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. ($**$) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) Montrer que si f est lipschitzienne sur tout segment de $\mathring{I}$.
2) Le résultat est-il vrai sur tout segment de I ?

Exercice 14. ($*$) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur I. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.