Calcul de DL

Exercice 1. (♡)

1) Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0:

-a- $\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-2x}}{1-3x}$ à l'ordre 2

-b- $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x}}$ à l'ordre 3

-c- $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2

-d- $\mathrm{e}^{\cos x}$ à l'ordre 4

-e- $\sin^2 x\cos^2 x$ à l'ordre 4

-f- $\sin^2 x$ à l'ordre 5

-g- $\sin^3 x$ à l'ordre 5

-h- $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2

-i- $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ à l'ordre 3

-j- $\operatorname{Arctan} x\,\mathrm{e}^{(x^2)}$ à l'ordre 3

-k- $\dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2

-l- $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ à l'ordre 2

2) Pour les fonctions des questions a-b-f-g-j, préciser la tangente à la courbe (au point d'abscisse 0) et sa position par rapport à la courbe. Vous ferez un schéma illustratif

3) On note f la fonction d'expression de la question -b-. Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

NB : et pour ceux qui veulent se muscler davantage vous augmentez d'un les ordres des DL ci-dessus.

Exercice 2. (♡) Calculer les développements limités suivants

1) $\frac{1}{x}$ au voisinage de 3 à l'ordre 2

2) $\sqrt{x}$ au voisinage de 4 à l'ordre 2

3) $\frac{\ln x}{x}$ au voisinage de 2 à l'ordre 2

4) $(\sin x)^x$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2

Exercice 3. $(*)$ Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 4. $(*)$DL d'une réciproque

1) Retrouver le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan en utilisant le DL_5 de $\operatorname{Arctan} c$ et le fait que Arctan est la réciproque de tan.

2) Soit f définie par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

-a- Montrer que f admet une réciproque impaire de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

-b- Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 5. $(*)$ Retrouver le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan en utilant $\tan' = 1+\tan^2$.

Calcul de limites et d'équivalents

Exercice 6. (♡) Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de

1) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$

2) $\ln(1+\sin x) - \sin(\ln(1+x))$

3) $\dfrac{\ln(\cos x) + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}}{\sin^3 x}$.

Exercice 7. (♡) Calculer les limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\operatorname{Arctan} x - x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\ln(1+x) - \sin x)}{\tan x - x}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1\right)$

Exercice 8. (♡)

1) Déterminer un équivalent de $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

2) Calculer la limite de $u_n = \left(\dfrac{\cos\frac{1}{n} + \operatorname{ch}\frac{1}{n}}{2}\right)^{n^4}$.

Autres applications des DL

Exercice 9. ($*$)

1) Montrer que la fonction f définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ admet un prolongement en 0 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

2) Montrer que la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2},0[\cup]0,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{1}{x}$ admet un prolongement en 0 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 10. ($\heartsuit$) Déterminer le signe de $u_n=\operatorname{sh}\dfrac{1}{n}-\tan\dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 11. ($*$) Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et f la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x)=\dfrac{\ln(1+ax)}{1+x}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.

Exercice 12. ($**$) Soit h continue sur $[0,+\infty[$ telle que $h(x)=\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x)$. Montrer que : $\displaystyle\int_x^{2x}h(t)\,\mathrm{d}t=\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

Exercice 13. ($*$) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy'+2y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Développement asymptotique

Exercice 14. ($*$) Déterminer un équivalent de $\operatorname{sh}x\ln(\sin x)-x\ln x$ au voisinage de 0.

Exercice 15. ($\heartsuit$) Déterminer un développement asymptotique de $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 16. ($**$) Déterminer un développement asymptotique de $u_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 17. ($**$) Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\int_0^1(1+x^2)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x=a+\frac{b}{n}+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2}).$$

Exercice 18. ($\heartsuit$) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$.
Donner un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$ à la précision $\frac{1}{x}$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote au voisinage de $\pm\infty$ dont on précisera l'équation et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 19. ($*$) Faire l'étude locale au voisinage de $+\infty$ (limite, équivalent, asymptote, position par rapport à la courbe) des fonctions suivantes:

1) $f(x)=\sqrt{x^3\operatorname{sh}\dfrac{1}{x}}$

2) $f(x)=x(\ln(2x+1)-\ln x)$.

Quelques solutions

Exercice 1

1) $x + x^2 + o(x^2)$
2) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3 + o(x^3)$
3) $\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11}{24}\,\mathrm{e}\,x^2 + o(x^2)$
4) $\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + \frac{1}{6}\,\mathrm{e}\,x^4 + o(x^4)$
5) $x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$
6) $x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$
7) $x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$
8) $1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$
9) $1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$
10) $x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$
11) $1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$
12) $\mathrm{e} + \mathrm{e}\,x + \mathrm{e}\,x^2 + o(x^2)$

Exercice 2

1) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{27}(x-3)^2 + o((x-3)^2)$
2) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + o((x-4)^2)$
3) $\frac{1}{2}\ln 2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln 2)(x-2) + (-\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\ln 2)(x-2)^2 + o((x-2)^2)$
4) $1 - \frac{\pi}{4}(x - \frac{\pi}{2})^2 + o((x - \frac{\pi}{2})^2)$