Exercice 12. (∗∗) Soit h continue sur $[0,+\infty[$ telle que $h(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$. Montrer que : $\displaystyle\int_x^{2x} h(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

Correction - Posons H une primitive de h sur $[0,+\infty[$. Alors $H'(x) = h(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$ donc $H(x) = H(0) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.
Donc :

$$\int_x^{2x} h(t)\,\mathrm{d}t = H(2x) - H(x) = H(0) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(4x^2) - H(0) - \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\,.$$

Exercice 16. (∗∗) Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Correction - Pour $n \geqslant 4$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n} + 1.$$

Pour $k \leqslant n-4$, on a $k! \leqslant (n-4)!$, donc

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-4} \frac{(n-4)!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-4} \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

Donc

$$0 \leqslant n^2 \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{n}{(n-1)(n-2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!} = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$, puis $\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)} = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$.
Donc

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}) = 1 + \frac{1}{n-1} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}).$$

Enfin

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}).$$

Finalement,

$$\boxed{u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})}.$$

Exercice 17. (∗∗) Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = a + \frac{b}{n} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2}).$$

Correction - Soit $x \in [0,1]$ fixé. Pour n au voisinage de $+\infty$, $(1+x^2)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(1+x^2)} =$.
On utilise $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2) = 1 + u + \mathrm{O}(u^2) = 1 + u + u^2\varepsilon(u)$ où ε est bornée au voisinage de 0.
Posons alors $K \in \mathbb{R}_+$, $\delta > 0$ tel que : $\forall u \in [-\delta,\delta]$, $|\varepsilon(u)| \leqslant K \quad (*)$
NB : on fait le choix d'écrire O à l'aide de la fonction ε pour faire apparaître la dépendance en x.
Donc :

$$(1+x^2)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(1+x^2)} = 1 + \frac{1}{n}\ln(1+x^2) + \frac{1}{n^2}\ln^2(1+x^2)\varepsilon\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right).$$

On intègre sur $[0,1]$

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n^2}\int_0^1 \ln^2(1+x^2)\varepsilon\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Reste à prouver que $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(1+x^2)\varepsilon\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right)\,\mathrm{d}x$ est bornée au voisinage de $+\infty$.
Pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+x^2) \leqslant \ln(2)$, pour alors alors N tel que $\dfrac{1}{N}\ln 2 \leqslant \delta$, dans ce cas :

$$\forall x \in [0,1],\quad \forall n \geqslant N,\quad 0 \leqslant \frac{1}{n}\ln(1+x^2) \leqslant \frac{1}{N}\ln 2 \leqslant \delta$$

et donc d'après $(*)$,

$$\forall x \in [0,1],\quad \forall n \geqslant N,\quad 0 \leqslant \ln^2(1+x^2)\varepsilon\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right) \leqslant \ln^2(2)K.$$

On intègre sur $[0,1]$,

$$\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \ln^2(1+x^2)\varepsilon\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln^2(2)K.$$

On a donc bien comme voulu

$$\boxed{\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})}.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on peut calculer :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

> **Exercice 18**. ($\heartsuit$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.
> Donner un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$ à la précision $\frac{1}{x}$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote au voisinage de $\pm\infty$ dont on précisera l'équation et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Correction - Après calculs (laissés au lecteur), on prouve

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \mathrm{o}_{+\infty}(\frac{1}{x}) \qquad f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \mathrm{o}_{-\infty}(\frac{1}{x}).$$

Conséquence :

- $\Delta_+ : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et est sous $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (signe de $\frac{3}{8x}$)
- $\Delta_- : y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et est sous $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ (signe de $-\frac{3}{8x}$)

> **Exercice 19**. ($*$) Faire l'étude locale au voisinage de $+\infty$ (limite, équivalent, asymptote, position par rapport à la courbe) des fonctions suivantes:
>
> 1) $f(x) = \sqrt{x^3 \operatorname{sh}\dfrac{1}{x}}$
>
> 2) $f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln x)$.

Correction - Méthode : déterminer un développement asymptotique de $f(x)$ à un ordre suffisant faisant apparaître une partie affine et un terme de position.

1) Après calculs (laissés au lecteur) : $f(x) = x + \dfrac{1}{12x} + \mathrm{o}_{+\infty}(\dfrac{1}{x})$.
   Conséquence : $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \text{ et } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$. Puis : $\boxed{\Delta : y = x \text{ est asymptote et est sous } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty}$.

2) Après calculs (laissés au lecteur) : $f(x) = \ln(2)x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8x} + \mathrm{o}_{+\infty}(\dfrac{1}{x})$.
   Conséquence : $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2)x \text{ et } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$. Puis : $\boxed{\Delta : y = \ln(2)x + \frac{1}{2} \text{ est asymptote et est au dessus de } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty}$.