MPSI/MP2I – Devoir Surveillé n° 7

Samedi 15 mars 2025

Durée : 4 heures

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

— chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie

— chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème

— toute question amène une réponse qui doit être encadrée

— les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français

— les notations de l'énoncé doivent être respectées

— les copies doivent être numérotées

— on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés

— on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

1 Exercice - Matrices magiques et semi-magiques

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On souhaite étudier la notion de matrice *semi-magique* définie comme suit.

Définition (matrice semi-magique) : Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice est dite *semi-magique* s'il existe un réel, noté $\sigma(A)$, tel que :

$$\left(\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sigma(A)\right) \quad \text{et} \quad \left(\forall\, j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sigma(A)\right).$$

Autrement dit, A est une matrice semi-magique si, et seulement si, toutes ses lignes et toutes ses colonnes ont la même somme.

On note $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I : Généralités

1) **Deux exemples pour commencer.**

-a- Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

-i- Montrer que la matrice A est semi-magique et calculer $\sigma(A)$.

-ii- La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}. Est-elle semi-magique ?

-b- Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

-i- Montrer que la matrice J est semi-magique et expliciter $\sigma(J)$.

-ii- La matrice J est-elle inversible ? Si oui, J^{-1} est-elle aussi semi-magique ?

2) **Structure de l'ensemble $\mathbf{SMag}_n(\mathbb{R})$**

-a- Soient A et B appartenant à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ et λ et μ appartenant à $\mathbb{R}$.
Montrer que $\lambda A + \mu B$ appartient à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ et établir que :

$$\sigma(\lambda A + \mu B) = \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B).$$

-b- Montrer que $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

-c- Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir que :

$$A \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow (\exists\ \lambda \in \mathbb{R},\ JA = AJ = \lambda J) \tag{1}$$

et exprimer λ en fonction de $\sigma(A)$.

-d- En déduire que :

$$\forall\ (A,B) \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})^2, \quad AB \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B).$$

-e- En utilisant (1), établir que $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

-f- Soit A appartenant à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, où $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire d'ordre n.
En utilisant (1), montrer que $\sigma(A) \neq 0$, que A^{-1} appartient à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ et que $\sigma\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\sigma(A)}$.

-g- Réciproquement, soit A appartenant à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ telle que $\sigma(A) \neq 0$. Peut-on conclure que A est inversible ?

Partie II : Matrices magiques dans le cas où $n = 3$

Dans toute cette partie, on se place dans le cas où $n = 3$ et on étudie les matrices *magiques* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition (matrice magique) : Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ est dite *magique* si elle est semi-magique et si de plus :

$$\sigma(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1}$$

On note $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

---

1) Montrer que $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{SMag}_3(\mathbb{R})$.

2) Montrer que :

$$\forall\ A \in \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad \sigma(A) = 3a_{2,2}. \tag{2}$$

3) Montrer que si A appartient à $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$, alors A^{T} appartient aussi à $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$.

4) Pour tout $n \geqslant 1$, on note :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ M^T = M\right\} \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ M^T = -M\right\}.$$

Montrer que les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5) On revient à $n = 3$.

-a- Montrer que toute matrice M de $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique.

-b- À l'aide de (2), déterminer quels sont les éléments de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$.

-c- Notons : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille (J, K, L) est génératrice de $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$.

2 Exercice - Etude de quelques développements limités

On pose pour $x \in\ ]-1,1[\,,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0.$$

1) -a- Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de g, puis celui de Arcsin.

-b- En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.
Puis donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 et étudier la position de cette tangente par rapport à la courbe au voisinage de 0.

2) Soit φ une fonction deux fois dérivable sur $]-1,1[$ solution de (E).

-a- Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule de Leibniz montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)\varphi^{(n+2)}(x) - (2n+3)x\varphi^{(n+1)}(x) - (n+1)^2\varphi^{(n)}(x) = 0.$$

-c- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \varphi^{(n)}(0)$. Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n.

-d- En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2}a_0 = \binom{2p}{p}\frac{(2p)!\,a_0}{2^{2p}}, \qquad a_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2 a_1.$$

3) On détermine quelques développements limités à l'aide de la question 2).

-a- Montrer que g est solution de l'équation (E). Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?

-b- En déduire le développement limité de g à l'ordre $2n$ au voisinage de 0.

-c- Déterminer alors le développement limité de Arcsin à l'ordre $2n+1$ au voisinage de 0.

-d- Montrer que f est solution de l'équation (E). Que valent $f(0)$ et $f'(0)$?

-e- En déduire le développement limité de f à l'ordre $2n+1$ au voisinage de 0.

4) En remarquant que $f = \text{Arcsin} \times g$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1}\binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}.$$

3 Exercice - Fonctions logarithmiquement convexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *logarithmiquement convexe* lorsque f est à valeurs strictement positives et que la fonction composée notée $\ln f : x \mapsto \ln f(x)$ est convexe sur I.

1) Exemple.

-a- Montrer que la fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}$.

-b- En déduire les inégalités suivantes :

(I_1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(x_k)}.$

(I_2) $\forall (a,x) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{ch}(a+x) \geqslant \operatorname{ch}(a)\,\mathrm{e}^{x\,\operatorname{th}(a)}.$

2) Montrer que tout produit de deux fonctions logarithmiquement convexes est logarithmiquement convexe.

3) Une condition nécessaire.

-a- Montrer que toute fonction logarithmiquement convexe est aussi convexe.

-b- Donner, en justifiant sa validité, un exemple simple de fonction qui soit convexe et strictement positive sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$, mais qui ne soit pas logarithmiquement convexe.

4) Fonctions deux fois dérivables. Notons $\mathcal{D}^2(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur I.

-a- Soit $f \in \mathcal{D}^2(I,\mathbb{R})$ à valeurs strictement positives. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(P_1) f est logarithmiquement convexe ;
(P_2) $\forall x \in I,\ f'(x)^2 - f(x)f''(x) \leqslant 0$;
(P_3) $\forall x \in I, \forall t \in \mathbb{R},\ t^2 f''(x) + 2tf'(x) + f(x) \geqslant 0$.
Indication : pour (P_3), on pourra considérer le discriminant d'un trinôme.

-b- En déduire que l'ensemble des fonctions logarithmiquement convexes de $\mathcal{D}^2(I,\mathbb{R})$ est stable par addition.

5) Une condition nécessaire et suffisante. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs strictement positives.
On note (C) la condition suivante : pour tout $m \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-mx}$ est convexe sur I.

-a- Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors elle vérifie la condition (C).

-b- Montrer que pour tout $(a,b) \in I^2$, il existe $(m,p) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-(mx+p)}$ vérifie

$$g(a) = g(b) = 1.$$

En déduire que si f vérifie la condition (C), alors elle est logarithmiquement convexe.