MPSI/MP2I – Devoir Surveillé 7

Samedi 15 Mars

Corrigé

Exercice - Deux développements limités

1. Puisque $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o_0(x^3)$, alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)\right) - 2\left(x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}{x^3} \\
&= \frac{\left(2x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o_0(x^3)\right) - 2\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}{x^3} \\
&= \frac{\frac{x^3}{6} + o_0(x^3)}{x^3} \\
&= \frac{1}{6} + o_0(1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{6}}$.

2. Puisque $\mathrm{sh}(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o_0(x^4)$, alors :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\mathrm{sh}^2(x) - x^2}{x^2\mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)^2 - x^2}{x^2\mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{x^2 + \frac{x^4}{3} - x^2 + o_0(x^4)}{x^2\mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{\frac{x^4}{3} + o_0(x^4)}{x^2\mathrm{sh}^2(x)}
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, alors $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{3}x^4}{x^2 \times x^2}$, et donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{3}$. Finalement, $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{3}}$.

Exercice - Arctan and co

Partie I - Questions préliminaires sur Arctan

1) La fonction Arctan est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$, ses limites sont $\boxed{\lim_{x\to -\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$.

Puisque $\forall\ x \in \mathbb{R}$, Arctan'(x)>0, alors son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arctan	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

.

2) $\boxed{\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)}$.

3) Posons $\varphi : u \longmapsto \text{Arctan}(u) - u$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions usuelles qui le sont et :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(u) = \frac{1}{1+u^2} - 1 = -\frac{u^2}{1+u^2}.$$

Remarquons que $\forall\, u > 0,\ \varphi'(u) < 0$. La fonction φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $\varphi(u) = 0$, donc $\boxed{\forall\, u > 0,\ \text{Arctan}(u) < u}$ (on reconnaît un résultat de convexité).

Partie II - Étude d'une fonction

1) Puisque Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{D}_f = \{t \in \mathbb{R} \ /\ 1+t \neq 0\}$, donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$.

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ est une fonction rationnelle de classe $\boxed{\mathcal{C}^\infty}$ sur $\mathcal{D}_f$. Par composition par la fonction Arctan, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nous obtenons que $t \longmapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+t}\right)$ est de classe $\boxed{\mathcal{C}^\infty}$ sur $\mathcal{D}_f$. Ainsi f est de classe $\boxed{\mathcal{C}^\infty}$ sur $\mathcal{D}_f$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

2) -a- On a $\displaystyle\lim_{\substack{t\to -1\\ t<-1}} \frac{1}{1+t} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$, donc par composition de limites :

$$\lim_{\substack{t\to -1\\ t<-1}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+t}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to-1} t^2 = 1$, alors par produit $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{t\to -1\\ t<-1}} f(t) = -\frac{\pi}{2}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} \frac{1}{1+t} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$, alors de même $\displaystyle\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+t}\right) = \frac{\pi}{2}$, puis par produit $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} f(t) = \frac{\pi}{2}}$.

-b- On sait que $\text{Arctan}(u) \underset{u\to0}{\sim} u$. Or $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{1+t} = 0$, donc $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+t}\right) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{1+t}$. Comme $\dfrac{1}{1+t} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$, alors nous concluons que $f(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} t$. Nous en déduisons alors que

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty}.$$

-c- On a $\dfrac{h}{1+h} = h \times \dfrac{1}{1+h} = h\left(1 - h + h^2 + o_0(h^2)\right) = h - h^2 + h^3 + o_0(h^3)$.

Comme $\text{Arctan}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o_0(x^3)$, alors :

$$\begin{aligned}
\text{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right) &= h - h^2 + h^3 - \frac{1}{3}\left(h - h^2 + h^3\right)^3 + o_0(h^3)\\
&= h - h^2 + h^3 - \frac{1}{3}h^3 + o_0(h^3)\\
&= h - h^2 + \frac{2}{3}h^3 + o_0(h^3)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{Arctan}\left(\dfrac{h}{1+h}\right) = h - h^2 + \dfrac{2}{3}h^3 + o_0(h^3)}$.

-d- Posons $h = \dfrac{1}{t}$ et $g : h \longmapsto hf\left(\dfrac{1}{h}\right)$.

$$\begin{aligned}
g(h) &= \frac{1}{h}\text{Arctan}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{h}}\right)\\
&= \frac{1}{h}\text{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)\\
&= 1 - h + \frac{2}{3}h^2 + o_0(h^2)
\end{aligned}$$

D'où $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x} + o_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi la droite d'équation $\boxed{y = x - 1}$ est asymptote à la courbe représentative de f aussi bien en $-\infty$ que $+\infty$. La courbe est au-dessus de son asymptote en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

3) -a- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et :

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f'(t) &= 2t\text{Arctan}\left(\frac{1}{1+t}\right) + t^2 \times \frac{-1}{(1+t)^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^2} \\
&= 2t\text{Arctan}\left(\frac{1}{1+t}\right) - \frac{t^2}{1+(1+t)^2} \\
&= t\left(2\text{Arctan}\left(\frac{1}{1+t}\right) - \frac{t}{t^2+2t+2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\boxed{\forall\, t \in \setminus\{-1\},\ \varphi(t) = 2\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+t}\right) - \dfrac{t}{t^2+2t+2}}$, on obtient bien l'égalité $\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f'(t)$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \varphi'(t) &= 2\frac{-1}{(1+t)^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^2} - \frac{t^2+2t+2-t(2t+2)}{(t^2+2t+2)^2} \\
&= \frac{-2}{t^2+2t+2} - \frac{-t^2+2}{(t^2+2t+2)^2} \\
&= \frac{-2t^2-4t-4+t^2-2}{(t^2+2t+2)^2} \\
&= \frac{-t^2-4t-6}{(t^2+2t+2)^2}
\end{aligned}$$

Ce qui confirme bien que $\varphi'(t)$ est du signe de $\boxed{-t^2-4t-6}$.
Comme le polynôme $-X^2-4X-6$ a un discriminant strictement négatif, alors φ' est strictement négative sur $\mathcal{D}_f$. Elle est donc strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$.
Souvenons nous que $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+t}\right) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{1+t}$, donc $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+t}\right) = 0$. Comme $-\dfrac{t}{t^2+2t+2} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} -\dfrac{1}{t}$, alors $\lim\limits_{t\to\pm\infty} -\dfrac{t}{t^2+2t+2} = 0$ et par somme $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \varphi(t) = 0$.
Souvenons nous encore que $\lim\limits_{\substack{t\to-1\\t<-1}} \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+t}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. Comme $\lim\limits_{t\to-1} -\dfrac{t}{t^2+2t+2} = 1$, alors par combinaison linéaire $\lim\limits_{\substack{t\to-1\\t<-1}} \varphi(t) = -\pi+1 < 0$.
De la même façon on obtient que $\lim\limits_{\substack{t\to-1\\t<-1}} \varphi(t) = \pi+1 > 0$.
Conclusion : φ est strictement négative sur $]-\infty,-1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.
Comme $\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f'(t) = t\varphi(t)$, alors f' est strictement négative sur $]-\infty,-1[$, strictement négative sur $]-1,0[$ et enfin strictement positive sur $]0,+\infty[$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty,-1[\text{ et }]-1,0] \text{ et strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

-b- D'après la question 2)-a-, $\lim\limits_{\substack{t\to-1\\t<-1}} f(t) = -\dfrac{\pi}{2}$, donc on peut prolonger f par continuité à gauche en -1 en posant $f(0) = -\dfrac{\pi}{2}$ (et en confondant allègrement f avec son prolongement). Ce prolongement est dérivable sur $]-\infty,-1[$ et, comme $\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f'(t) = t\varphi(t)$, par produit de limites (dont une obtenue à la question précédente) :

$$\lim_{\substack{t\to-1\\t<-1}} f'(t) = -\pi - 1.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement considéré est dérivable à gauche en -1, et la courbe $\mathcal{C}_f$ possède au point de coordonnées $\left(-1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ une tangente à gauche de coefficient directeur

$\boxed{-\pi - 1}$.

Toujours d'après la question 2)-a-, $\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} f(t) = \dfrac{\pi}{2}$, donc on peut prolonger f par continuité à droite en -1 en posant $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ (et en confondant encore f avec ce nouveau prolongement). Ce prolongement est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et par produit de limites :

$$\lim_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} f'(t) = \pi - 1.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement considéré est dérivable à droite en -1, et la courbe $\mathcal{C}_f$ possède au point de coordonnées $\left(-1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ une tangente à gauche de coefficient directeur $\boxed{\pi - 1}$.

Exercice - Matrices magiques et semi-magiques

Partie I : Généralités

1) **Deux exemples pour commencer.**

-a- Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

-i- Les somme des trois lignes et des trois colonnes de A sont toutes égales à 2.
$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est semi-magique et } \sigma(A) = 2}$.

-ii- Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à A et I_3 :

0	1	1	$L_1 \longleftrightarrow L_2$	1	0	0
1	0	1	$L_2 \longleftrightarrow L_1$	0	1	0
1	1	0		0	0	1
1	0	1		0	1	0
0	1	1		1	0	0
1	1	0	$L_3 \leftarrow \boxed{1} L_3 - L_2 - L_1$	0	0	1
1	0	1	$L_1 \longleftarrow \boxed{1} L_1 + \frac{1}{2} L_3$	0	1	0
0	1	1	$L_2 \leftarrow \boxed{1} L_2 + \frac{1}{2} L_3$	1	0	0
0	0	-2	$L_3 \longleftarrow \boxed{-\frac{1}{2}} L_3$	-1	-1	1
1	0	0		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Ainsi A est inversible, $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ A^{-1} \text{ est magique et } \sigma\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{2}}$.

-b- Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

-i- La somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne est égale à $n \times 1 = n$ donc :

$$\boxed{J \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \sigma(J) = n}.$$

-ii- Puisque toutes les colonnes de J sont égales entre elles , alors $\boxed{\text{la matrice } J \text{ n'est pas inversible.}}$

2) **Structure de l'ensemble $\mathbf{SMag}_n(\mathbb{R})$**

-a- Soient A et B appartenant à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ et λ et μ appartenant à $\mathbb{R}$.
Notons $C = \lambda A + \mu B$. Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

- ⋆ Pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \mu \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B).$$

car les matrices A et B sont semi-magiques (et par définition de $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$).

- ⋆ De la même façon, on a :

$$\forall\ j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} = \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B).$$

Ainsi $\lambda A + \mu B \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ (A,B) \in (\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}))^2,\ \sigma(\lambda A + \mu B) = \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B)}.$$

-b- — Par définition, $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
— La matrice nulle 0_3 est clairement semi-magique, donc $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.
— D'après la question précédente, $\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ (A,B) \in (\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}))^2,\ \lambda A + \mu B \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$, autrement dit $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

Ainsi $\boxed{\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

-c- Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $J = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $JA = (e_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $AJ = (f_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \quad \text{et} \quad f_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}d_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.$$

On raisonne par double implication.

- ⋆ Supposons que A appartienne à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a alors (par définition d'une matrice semi-magique) :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sigma(A) \quad \textit{i.e.} \quad e_{i,j} = f_{i,j} = \sigma(A)$$

Or $\sigma(A)J$ est la matrice dont tous les coefficients valent $\sigma(A)$ donc $JA = AJ = \sigma(A)J$. La propriété est donc démontrée avec le nombre réel $\lambda = \sigma(A)$.

- ⋆ Réciproquement, supposons qu'il existe λ appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $JA = AJ = \lambda J$.
Alors :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad e_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = \lambda \quad \text{et} \quad f_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \lambda.$$

La matrice A est donc semi-magique et $\sigma(A) = \lambda$.

Finalement :

$$\boxed{A \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ si, et seulement s'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } JA = AJ = \lambda J \text{ et, dans ce cas, } \lambda = \sigma(A)}.$$

-d- Soient A et B appartenant à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$. D'après (1), on a :

$$JA = AJ = \sigma(A)J \text{ et } JB = BJ = \sigma(B)J.$$

En utilisant l'associativité du produit matriciel, on a :

$$J(AB) = (JA)B = (\sigma(A)J)B = \sigma(A)JB = \sigma(A)\sigma(B)J$$

De la même manière, on a $(AB)J = \sigma(A)J$. On peut alors conclure d'après (1) que AB appartient à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ et que $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$. Finalement :

$$\boxed{\forall\ (A,B) \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})^2, \quad AB \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B).}$$

-e- — On sait que $(\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}),+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,.)$, donc $(\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}),+,.)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,.)$.

— De plus, $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit (d'après la question précédente).

— Enfin, la matrice I_n appartient à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})$ (la somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne est égal à 1).

Finalement, $\boxed{(\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}),+,.) \text{ est un sous-anneau de } (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\times)}$.

On peut remarquer que les questions 2)-b- et 2)-e- font même de $(\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}),+,.)$ *une sous-algèbre de* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\times)$.

-f- Soit A appartenant à $\mathrm{SMag}_n(\mathbb{R})\cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a $JA = AJ = \sigma(A)J$ et A est inversible, donc (en multipliant à gauche par A^{-1}) :

$$A^{-1}JA = J = \sigma(A)A^{-1}J.$$

La dernière égalité implique que $\sigma(A) \neq 0$ (puisque $J \neq 0_n$) et fournit l'égalité $A^{-1}J = \dfrac{1}{\sigma(A)}J$.

En multipliant maintenant à droite par A^{-1}, on a $J = \sigma(A)JA^{-1}$ donc $JA^{-1} = \dfrac{1}{\sigma(A)}J$. Ainsi A^{-1} est une matrice semi-magique et $\sigma\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\sigma(A)}$. Finalement :

$$\boxed{\sigma(A) \neq 0, \quad A^{-1} \in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\sigma(A)}}$$

-g- Rappelons-nous que nous avons vu à la question 1) -a- i) que J est semi-magique, non inversible et vérifie $\sigma(J) = n \neq 0$. La réciproque est donc fausse.

Partie II : Matrices magiques dans le cas où $n = 3$

1. — Par définition, $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SMag}_3(\mathbb{R})$.

   — La matrice nulle 0_3 est clairement magique, donc $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

   — Soient A et B appartenant à $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ et λ et μ appartenant à $\mathbb{R}$.
   Les matrices A et B sont semi-magiques donc $\lambda A + \mu B$ appartient à $\mathrm{SMag}_3(\mathbb{R})$ et nous savons déjà que : $\sigma(\lambda A + \mu B) = \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B)$ (d'après la question 2)-a-).
   Notons maintenant $C = \lambda A + \mu B$ et posons $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors :

$$\begin{aligned} c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} &= \lambda a_{1,1} + \mu b_{1,1} + \lambda a_{2,2} + \mu b_{2,2} + \lambda a_{3,3} + \mu b_{3,3} \\ &= \lambda(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}) + \mu\left(b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3}\right) \\ &= \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B) \end{aligned}$$

   car les matrices A et B sont magiques. De la même manière, on a :

$$c_{1,3} + c_{2,2} + c_{3,1} = \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B).$$

   La matrice $A + \lambda B$ est donc magique.

   Finalement, $\boxed{\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{SMag}_3(\mathbb{R})}$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ appartenant à $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= 3\sigma(A) - 2\sigma(A) \\ &= (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3}) + (a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3}) - (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}) - (a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1}) \\ &= -a_{2,2} + (a_{1,2} + a_{3,2}) + (a_{2,1} + a_{2,3}) \\ &= -a_{2,2} + (\sigma(A) - a_{2,2}) + (\sigma(A) - a_{2,2}) \end{aligned}$$

   Par conséquent :

$$\boxed{\sigma(A) = 3a_{2,2}}.$$

3. Soit A appartenant à $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$. La somme des coefficients sur la i^{e} ligne (respectivement colonne) de A^{T} est la somme des coefficients sur la i^{e} colonne (respectivement ligne) de A. Toutes ces sommes sont égales car A est magique. Il en va de même pour les deux diagonales. Donc :

$$\boxed{\forall\, A \in \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}),\ A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}) \text{ et } \sigma\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \sigma(A)}.$$

4. Commençons par montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   — Par définition, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   — La matrice nulle 0_n est aussi bien symétrique qu'antisymétrique, donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.
   — • Soient λ et μ appartenant à $\mathbb{R}$ et S_1 et S_2 appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$(\lambda S_1 + \mu S_2)^T = \lambda S_1^T + \mu S_2^T = \lambda S_1 + \mu S_2.$$

   Ainsi $\lambda S_1 + \mu S_2$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   • Soient λ et μ appartenant à $\mathbb{R}$ et A_1 et A_2 appartenant à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)^T = \lambda A_1^T + \mu A_2^T = \lambda(-A_1 + \mu - A_2) = -(\lambda A_1 + \mu A_2).$$

   Ainsi $\lambda A_1 + \mu A_2$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   Montrons maintenant que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Utilisons un raisonnement par analyse-synthèse.
   ⋆ **Analyse :** supposons qu'il existe $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.
   Alors $M^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}$ par définition de S et A, donc $M^T = S - A$ et $M = S + A$. Ces deux relations fournissent les égalités :

$$S = \frac{1}{2}\left(M + M^{\mathrm{T}}\right) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}\left(M - M^{\mathrm{T}}\right).$$

   Ainsi, si S et A existent, alors elles sont uniquement déterminées.
   ⋆ **Synthèse :** Vérifions que les matrices $S = \frac{1}{2}\left(M + M^{\mathrm{T}}\right)$ et $A = \frac{1}{2}\left(M - M^{\mathrm{T}}\right)$ obtenues précédemment sont respectivement symétrique et antisymétrique et que $M = S + A$.
   — $S + A = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^{\mathrm{T}} = M$.
   — $S^T = \frac{1}{2}\left(M + M^{\mathrm{T}}\right)^T = \frac{1}{2}\left(M^T + (M^T)^T\right) = \frac{1}{2}\left(M^T + M\right) = S$
   — $A^T = \frac{1}{2}\left(M - M^{\mathrm{T}}\right)^T = \frac{1}{2}\left(M^T - (M^T)^T\right) = \frac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -A$

   Ainsi :

$$\boxed{\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists!\ (S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\ /\ M = S + A}$$

   Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. (a) Si M appartient à $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$, alors les matrices $S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)$ et $A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$ sont magiques (d'après les questions -1- et -3-) et elles sont respectivement symétrique et antisymétrique. D'après la question précédente, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{toute matrice } M \text{ de } \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}) \text{ peut s'écrire de manière unique comme la somme}}$$
$$\boxed{\text{d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique.}}$$

   (b) Soit S appartenant à $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$. La matrice S étant magique, la relation (2) nous donne le système :

$$\begin{cases} a & +b & +c & & & & = & 3d \\ & b & & +d & +e & & = & 3d \\ & & c & & +e & +f & = & 3d \\ a & & & +d & & +f & = & 3d \\ & & 2c & +d & & & = & 3d \end{cases}$$

   d'où l'on tire que $c = d$, $e = a$ et $f = b$, *i.e.* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $3c = a + c + b$ donc $b = 2c - a$.
   Finalement, $S = \begin{pmatrix} a & 2c-a & c \\ 2c-a & c & a \\ c & a & 2c-a \end{pmatrix}$. Réciproquement, on vérifie facilement que si S est de cette forme, alors elle est une matrice magique symétrique. Ainsi :

$$\boxed{\forall\ S \in \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists (a, c) \in \mathbb{R}^2\ /\ S = \begin{pmatrix} a & 2c-a & c \\ 2c-a & c & a \\ c & a & 2c-a \end{pmatrix}}.$$

Soit A appartenant à $\text{Mag}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A étant magique, la relation (2) nous donne le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a & +b & & = & 0 \\ -a & & +c & = & 0 \\ & -b & -c & = & 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on tire que $b = -a$, $c = a$, *i.e.* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$. $b = 2c - a$. Finalement, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$.
Réciproquement, on vérifie facilement que si A est de cette forme, alors elle est une matrice magique symétrique. Ainsi :

$$\boxed{\forall\ A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \iff \exists a \in \mathbb{R} /\ A = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}}.$$

(c) Notons : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrons que la famille (J, K, L) est génératrice de $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$.
Commençons pour cela par remarquer que les matrices J, K et L sont magiques. Ainsi $\text{Vect}(J, K, L) \subset \text{Mag}_3(\mathbb{R})$.
Réciproquement, considérons M appartenant à $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$. D'après 5)-a-, il existe des matrices magiques S et A, respectivement symétrique et antisymétrique, telles que $M = S + A$. D'après la question 5)-b-, il existe (a, b, c) appartenant à $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$S = \begin{pmatrix} a & 2b-a & b \\ 2b-a & b & a \\ b & a & 2b-a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c & -c \\ -c & 0 & c \\ c & -c & 0 \end{pmatrix} = cL$$

En résolvant l'équation $S = \alpha J + \beta K$, d'inconnue $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que $\alpha = b$ et $\beta = a - b$. Ainsi :

$$M = BJ + (a-b)K + cL$$

Ceci démontre l'inclusion $\text{Mag}_3(\mathbb{R}) \subset \text{Vect}(J, K, L)$. Ainsi $\boxed{\text{Mag}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}(J, K, L)}$, *i.e.* la famille (J, K, L) est génératrice de $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

Exercice - Etude de quelques développements limités

On pose pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \dfrac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0.$$

1) -a- Soit x au voisinage de 0,

$$g(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \text{o}(x^3).$$

Par primitivation de développement limité, on obtient

$$\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}(0) + x + \frac{1}{6}x^3 + \text{o}(x^3)$$

$$\boxed{\text{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \text{o}(x^3)}$$

-b- On en déduit :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^3)\right)\left(x+\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)\\
&= x+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\mathrm{o}(x^3)\\
&\boxed{f(x) = x+\frac{2}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3)}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La droite } T_0 : y = x \text{ est donc tangente à la courbe de } f \text{ au voisinage de } 0}$ et comme $f(x) - x \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3$, $\boxed{\text{la courbe est au-dessus de } T \text{ à droite de } 0 \text{ et au dessous à gauche de } 0}$.

2) Soit φ une fonction deux fois dérivable sur $]-1,1[$ solution de (E).

-a- On pose pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$: "φ est n fois dérivable sur $]-1,1[$".

- **Initialisation**. φ est deux fois dérivable par hypothèse.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que φ est n fois dérivable sur $]-1,1[$ alors φ' est $n-1$-fois dérivable sur I. Or pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\varphi''(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(3x\varphi'(x)+\varphi(x)\right).$$

  Donc φ'' est $n-1$ fois dérivable sur $]-1,1[$ par somme et produit de fonctions qui le sont. Par suite, φ est $n+1$ fois dérivable sur I.
- **Conclusion**. Pour tout n, φ est n fois dérivable sur $]-1,1[$ et donc $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite dériver n fois l'équation (E).
Pour $x \in]-1,1[$, on pose $u(x) = 1-x^2$ et $v(x) = 3x$. Ces deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, tout comme φ'', on peut donc appliquer la formule de Leibniz.
Une première fois pour $u\varphi''$:

$$\begin{aligned}
(u\varphi'')^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(\varphi'')^{(n-k)}\\
&= (1-x^2)\varphi^{(n+2)}(x) - 2nx\varphi^{(n+1)}(x) - 2\frac{n(n-1)}{2}\varphi^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Une seconde fois pour $v\varphi'$:

$$\begin{aligned}
(v\varphi')^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v^{(k)}(\varphi')^{(n-k)}\\
&= 3x\varphi^{(n+1)}(x)+3n\varphi^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

On combine ces résultats pour dériver n fois (E), on obtient pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1-x^2)\varphi^{(n+2)}(x) + (-2nx-3x)\varphi^{(n+1)}(x) - (n(n-1)+3n)\varphi^{(n)}(x) = 0$$

Donc, comme voulu,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)\varphi^{(n+2)}(x) - (2n+3)x\varphi^{(n+1)}(x) - (n+1)^2\varphi^{(n)}(x) = 0}.$$

-c- Soit $n \in \mathbb{N}$, on prend $x = 0$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$a_{n+2} + 0 - (n+1)^2 a_n = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{a_{n+2} = (n+1)^2 a_n}.$$

-d- On pose pour $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ "$a_{2p} = \dfrac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2}a_0 \qquad a_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2 a_1$".

- **Initialisation**. Pour $p = 0$,

$$\frac{((2\times 0)!)^2}{2^{2\times 0}(0!)^2}a_0 = a_0 \qquad 2^{2\times 0}(0!)^2 a_1 = a_1 = a_{2\times 0+1} \qquad \text{donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité**. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Alors au rang $p+1$,

$$\begin{aligned} a_{2p+2} &= (2p+1)^2 a_{2p} \quad \text{d'après 2)-c-} \\ &= (2p+1)^2 \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2} a_0 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(2p+2)^2}{(2p+2)^2}(2p+1)^2 \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2} a_0 \\ &= \frac{((2(p+1))!)^2}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2} a_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2p+3} &= (2p+2)^2 a_{2p+1} \\ &= (2p+2)^2 2^{2p}(p!)^2 a_1 \\ &= 2^{2(p+1)}((p+1)!)^2 a_1. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

- **Conclusion**. Comme voulu :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2} a_0 = \binom{2p}{p} \frac{(2p)! a_0}{2^{2p}} \qquad a_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2 a_1}.$$

3) -a- g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour $x \in]-1,1[$, on écrit $g(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, alors

$$g'(x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad g''(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Donc,

$$(1-x^2)g''(x) - 3xg'(x) - g(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Donc $\boxed{g \text{ est solution de l'équation } (E)}$. Et $\boxed{g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 0}$.

Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ sur $]-1,1[$, d'après la formule de Taylor-Young,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{g^k(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^{2n}).$$

D'après 2)-d-, avec $a_n = g^{(n)}(0) = 0$, et le fait que $a_0 = g(0) = 1$ et $a_1 = g'(0) = 0$, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad g^{2p}(0) = \binom{2p}{p} \frac{(2p)!}{2^{2p}} \qquad g^{2p+1}(0) = 0.$$

D'où

$$\boxed{g(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} x^{2p} + \mathrm{o}(x^{2n})}.$$

-b- Comme $\mathrm{Arcsin}' = g$ on primitive le développement limité précédent en utilisant $\mathrm{Arcsin}(0) = 0$,

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} x^{2p+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1})}.$$

-c- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour $x \in]-1,1[$, on réécrit $f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x^2)^{-1} + x\,\mathrm{Arcsin}(x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ f''(x) &= 2x(1-x^2)^{-2} + \mathrm{Arcsin}(x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x(1-x^2)^{-2} + 3x^2\,\mathrm{Arcsin}(x)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}(1-x^2)f''(x)-3xf'(x)-f(x) &= 2x(1-x^2)^{-1}+\operatorname{Arcsin}(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+x(1-x^2)^{-1}+3x^2\operatorname{Arcsin}(x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\\ &\quad -3x(1-x^2)^{-1}-3x^2\operatorname{Arcsin}(x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}-\operatorname{Arcsin}(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est solution de l'équation } (E)}$. Et $\boxed{f(0)=0 \text{ et } g'(0)=1}$.

Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ sur $]-1,1[$, d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{f^k(0)}{k!}x^k+\mathrm{o}(x^{2n+1}).$$

D'après 2)-d-, avec $a_n=f^{(n)}(0)=0$, et le fait que $a_0=f(0)=0$ et $a_1=f'(0)=1$, on obtient

$$\forall p\in\mathbb{N},\qquad f^{(2p)}(0)=0\qquad f^{(2p+1)}(0)=2^{2p}(p!)^2.$$

D'où

$$\boxed{f(x)=\sum_{p=0}^{n}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1})}.$$

4) En remarquant que $f=\operatorname{Arcsin}\times g$. On calcule alors le développement limité de f à l'ordre $2n+1$. Remarquons que g étant paire, la partie régulière trouvée en 3)-a- à l'ordre $2n$ est la même à l'ordre $2n+1$.
On identifie alors le coefficient devant x^{2n+1} dans le développement limité à l'ordre $2n+1$.
Dans f d'après 3)-e- c'est : $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
Dans le produit $\operatorname{Arcsin}\times g$, les termes en x^{2n+1} sont obtenus en multipliant les termes en x^{2p+1} de Arcsin et ceux en $x^{2(n-p)}$ de g pour $p\in[\![0,n]\!]$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}&=\sum_{p=0}^{n}\frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}}\frac{\binom{2(n-p)}{n-p}}{2^{2(n-p)}}\\ &=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2p+1}\binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p}.\end{aligned}$$

On déduit :

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2p+1}\binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p}=\frac{2^{4n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

En observant que $\dbinom{2n+1}{n}=\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}=\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)(n!)^2}$, on obtient comme voulu :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2p+1}\binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p}=\frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}}.$$

1 Exercice - Fonctions logarithmiquement convexes

1) -a- La fonction ch est à valeurs dans $[1,+\infty[$, donc strictement positive. De plus $\ln\operatorname{ch}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition de fonctions qui le sont. En particulier $\ln\operatorname{ch}$ est dérivable deux fois. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$(\ln\operatorname{ch})'(x)=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}=\operatorname{th}(x)\quad\text{et}\quad(\ln\operatorname{ch})''(x)=\operatorname{th}'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}>0.$$

Donc $\ln\operatorname{ch}$ est convexe par caractérisation. $\boxed{\text{La fonction ch est logarithmiquement convexe}}$.

-b- (I_1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On applique l'inégalité de Jensen avec les coefficients $\lambda_k = \frac{1}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ qui sont positifs de de somme 1. Comme $\ln \operatorname{ch}$ est convexe :

$$\ln \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \operatorname{ch}(x_k) = \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(x_k)}\right).$$

Par croissance de l'exponentielle on obtient finalement :

$$\boxed{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(x_k)}.}$$

(I_2) La tangente à la courbe de $\ln \operatorname{ch}$ en a admet l'équation :

$$y = \ln \operatorname{ch}(a) + (\ln \operatorname{ch})'(a)(x-a), \qquad \text{i.e.} \qquad y = \ln \operatorname{ch}(a) + \operatorname{th}(a)(x-a).$$

Par convexité, la courbe est située au-dessus de cette tangente donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln \operatorname{ch}(x) \geqslant \ln \operatorname{ch}(a) + \operatorname{th}(a)(x-a).$$

Par croissance de l'exponentielle et propriété de morphisme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) \geqslant \operatorname{ch}(a)\, \mathrm{e}^{\operatorname{th}(a)(x-a)}.}$$

On en déduit l'inégalité voulue par changement de variable $x = a + x'$.

2) Soient $(a,b) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. La convexité de $\ln f$ donne : $\ln f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)\ln f(a) + \lambda \ln f(b)$, et de même pour $\ln g$. Par sommation terme à terme des deux inégalités, il vient alors :

$$\ln f((1-\lambda)a+\lambda b) + \ln g((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)\ln f(a) + (1-\lambda)\ln g(a) + \lambda \ln f(b) + \lambda \ln g(b).$$

La fonction $\ln f + \ln g$ est donc convexe. Or $\ln f + \ln g = \ln(fg)$ donc $\boxed{fg \text{ est logarithmiquement convexe.}}$

3) -a- Soit f logarithmiquement convexe sur I. Soient $(a,b) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. La définition de la convexité pour $\ln f$ donne $\ln f((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)\ln f(a) + \lambda \ln f(b)$. La croissance et la convexité de l'exponentielle entraînent alors :

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant \exp\left[(1-\lambda)\ln f(a) + \lambda \ln f(b)\right] \leqslant (1-\lambda)\exp[\ln f(a)] + \lambda \exp[\ln f(b)].$$

c'est-à-dire $f((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$. La fonction $\boxed{f \text{ est donc convexe par définition.}}$

-b- Posons $f : x \mapsto x$. Cette fonction est trivialement convexe. La composée $\ln f : x \mapsto \ln x$ est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui permet de conclure par caractérisation :

$$\ln f(x) = \ln x, \qquad (\ln f)'(x) = \frac{1}{x}, \qquad (\ln f)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \qquad \boxed{\text{la fonction } \ln f \text{ n'est pas convexe.}}$$

4) -a- La fonction f est deux fois dérivable, donc $\ln f$ est dérivable par composition de fonction dérivables : $(\ln f)' = f'/f$. Puis $(\ln f)'$ est dérivable par quotient de fonctions dérivables : $(\ln f)'' = (f'^2 - ff'')/f^2$. Comme $f^2 > 0$, la caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables donne alors :

$$(P_1) \iff \ln f \text{ est convexe} \iff (\ln f)'' \geqslant 0 \iff f'^2 - ff'' \geqslant 0 \iff (P_2).$$

Soit $x \in I$ fixé.

- Si $f''(x) = 0$, l'inégalité de (P_2) se traduit alors par $f'(x)^2 \leqslant 0$, i.e. $f'(x) = 0$. Et l'inégalité de (P_3) se traduit par : $\forall t \in \mathbb{R}, 2tf'(x) + f(x) \geqslant 0$. Comme $t \mapsto 2tf'(x) + f(x)$ est affine, elle est positive si et seulement si le coefficient directeur $2f'(x)$ est nul. Finalement, les inégalités de (P_2) et (P_3) sont équivalentes.
- Supposons désormais $f''(x) \neq 0$ et considérons $P : t \mapsto t^2 f''(x) + 2tf'(x) + f(x)$. C'est un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta(x) = 4[f'(x)^2 - f(x)f''(x)]$. Comme $P(0) = f(x)$ est positif,

$$\Delta(x) \leqslant 0 \iff P \text{ admet 0 ou 1 racine réelle} \iff P \text{ est de signe constant} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0.$$

L'équivalence entre (P_2) et (P_3) s'ensuit. Finalement par transitivité : $\boxed{(P_1) \iff (P_2) \iff (P_3)}$.

-b- Soient f, g deux fonctions logarithmiquement convexes de $\mathcal{D}^2(I,\mathbb{R})$. Posons $h = f + g$. Alors $h \in \mathcal{D}_2(I,\mathbb{R})$ par les théorèmes généraux et $h' = f' + g'$ ainsi que $h'' = f'' + g''$. Les fonctions f et g vérifient (P_1) donc (P_3) aussi. Par sommation terme à terme des deux inégalités obtenues,

$$\forall x \in I, \forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2\, h''(x) + 2t\, h'(x) + h(x) \geqslant 0.$$

Comme $h = f + g$ est à valeurs strictement positives, l'implication $(P_3) \implies (P_1)$ donne la conclusion.

$$\boxed{\text{L'ensemble des fonctions logarithmiquement convexes de } \mathcal{D}^2(I,\mathbb{R}) \text{ est stable par addition.}}$$

5) -a- Supposons que f est logarithmiquement convexe. Soit $m \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto -mx$ est trivialement convexe, donc $x \mapsto \mathrm{e}^{-mx}$ est logarithmiquement convexe. D'après la question 2), le produit $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-mx}$ est donc logarithmiquement convexe. Il est aussi convexe d'après la question 3). Donc (C) est vraie.

$$\boxed{\text{Toute fonction logarithmiquement convexe vérifie la condition } (C).}$$

-b- • Soit $(a, b) \in I^2$. Avec les notations de l'énoncé, un passage au logarithme conduit à :

$$g(a) = g(b) = 1 \iff \begin{cases} \ln f(a) - (ma + p) = 0 \\ \ln f(b) - (mb + p) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ma + p = \ln f(a) \\ mb + p = \ln f(b). \end{cases}$$

Si $a = b$, on peut poser $m = 0$ et $p = \ln f(a)$. Si $a \neq b$, le système est de Cramer car $\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a - b \neq 0$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, il existe donc un couple } (m,p) \in \mathbb{R}^2 \text{ qui réalise } g(a) = g(b) = 1.}$$

• Supposons que f vérifie (C). Alors la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-mx}$ est convexe, donc $g : x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-(mx+p)}$ est convexe aussi car $\mathrm{e}^{-p} > 0$. La sécante à la courbe de g en a et b admet l'équation $y = 1$. Par convexité, la courbe de g est située en dessous de cette sécante sur $[a, b]$. Donc :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x)\mathrm{e}^{-(mx+p)} \leqslant 1 \quad \text{i.e.} \quad \ln f(x) \leqslant mx + p.$$

Soit $\lambda \in [0, 1]$. En posant $a = (1 - \lambda)a + \lambda b$ on a bien $x \in [a, b]$, donc $\ln f(x) \leqslant (1 - \lambda)ma + \lambda mb + p$. Comme $p = (1 - \lambda)p + \lambda p$, on reconnaît une combinaison de $\ln f(a) = ma + p$ et $\ln f(b) = mb + p$:

$$\ln f\left((1-\lambda)a + \lambda b\right) \leqslant (1-\lambda)\ln f(a) + \lambda \ln f(b).$$

Cette inégalité est valide quels que soient $(a, b) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, donc $\ln f$ est convexe par définition.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ vérifie la condition } (C), \text{ alors } f \text{ est logarithmiquement convexe.}}$$