

MPSI/MP2I – Devoir Surveillé n° 7

Samedi 15 mars 2025

Durée : 4 heures

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

1 Exercice - Deux développements limités

Déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$;

2) $g : x \mapsto \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right)$.

2 Exercice - Arctan and co

Partie I - Questions préliminaires sur Arctan

1. Rappeler l'ensemble de définition, les limites, la dérivée et le tableau de variations de la fonction Arctan.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de la fonction Arctan au voisinage de 0 .
3. Démontrer que : $\forall u > 0, \operatorname{Arctan}(u) < u$.

Partie B - Etude d'une fonction

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction f définie par

$$f(t) = t^2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{1+t} \right)$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

1) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de la fonction f puis justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur ce domaine.

2) -a- Calculer les limites $\lim_{t \rightarrow -1^+} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -1^-} f(t)$.

-b- Chercher un équivalent de f en $+\infty$ et $-\infty$. En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$.

-c- Calculer un développement limité à l'ordre 3 de $h \mapsto \operatorname{Arctan} \left(\frac{h}{h+1} \right)$ au voisinage de 0 .

-d- Montrer que \mathcal{C}_f admet au voisinage de $\pm\infty$ une asymptote dont on précisera une équation cartésienne et la position par rapport à \mathcal{C}_f .

3) -a- Etudier les variations de f . Pour cela on écrira $f'(t) = t\varphi(t)$, où φ est une fonction à déterminer et on vérifiera que $\varphi'(t)$ est du signe de $-t^2 - 4t - 6$.

-b- Montrer que \mathcal{C}_f admet au point de coordonnées $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ une tangente à droite, dont on donnera le coefficient directeur. Question similaire pour le point de coordonnées $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ et l'existence d'une tangente à gauche.

3 Exercice - Matrices magiques et semi-magiques

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On souhaite étudier la notion de matrice *semi-magique* définie comme suit.

Définition (matrice semi-magique) : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice est dite *semi-magique* s'il existe un réel, noté $\sigma(A)$, tel que :

$$\left(\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sigma(A) \right) \quad \text{et} \quad \left(\forall j \in [1, n], \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sigma(A) \right).$$

Autrement dit, A est une matrice semi-magique si, et seulement si, toutes ses lignes et toutes ses colonnes ont la même somme.

On note $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I : Généralités

1) Deux exemples pour commencer.

-a- Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

-i- Montrer que la matrice A est semi-magique et calculer $\sigma(A)$.

-ii- La matrice A est-elle inversible? Si oui, calculer A^{-1} . Est-elle semi-magique?

-b- Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

-i- Montrer que la matrice J est semi-magique et expliciter $\sigma(J)$.

-ii- La matrice J est-elle inversible? Si oui, J^{-1} est-elle aussi semi-magique?

2) Structure de l'ensemble $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$

-a- Soient A et B appartenant à $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ et λ et μ appartenant à \mathbb{R} .
Montrer que $\lambda A + \mu B$ appartient à $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ et établir que :

$$\sigma(\lambda A + \mu B) = \lambda \sigma(A) + \mu \sigma(B).$$

-b- Montrer que $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

-c- Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir que :

$$A \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, JA = AJ = \lambda J) \tag{1}$$

et exprimer λ en fonction de $\sigma(A)$.

-d- En déduire que :

$$\forall (A, B) \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})^2, \quad AB \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B).$$

-e- En utilisant (1), établir que $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

-f- Soit A appartenant à $\text{SMag}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, où $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire d'ordre n .

En utilisant (1), montrer que $\sigma(A) \neq 0$, que A^{-1} appartient à $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ et que $\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$.

-g- Réciproquement, soit A appartenant à $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ telle que $\sigma(A) \neq 0$. Peut-on conclure que A est inversible?

Partie II : Matrices magiques dans le cas où $n = 3$

Dans toute cette partie, on se place dans le cas où $n = 3$ et on étudie les matrices *magiques* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition (matrice magique) : Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est dite *magique* si elle est semi-magique et si de plus :

$$\sigma(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1}$$

On note $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\text{SMag}_3(\mathbb{R})$.

2) Montrer que :

$$\forall A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad \sigma(A) = 3a_{2,2}. \quad (2)$$

3) Montrer que si A appartient à $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$, alors A^T appartient aussi à $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

4) Pour tout $n \geq 1$, on note :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^T = M\} \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^T = -M\}.$$

Montrer que les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5) On revient à $n = 3$.

-a- Montrer que toute matrice M de $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique.

-b- À l'aide de (2), déterminer quels sont les éléments de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \text{Mag}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \cap \text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

-c- Notons : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille (J, K, L) est génératrice de $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

4 Exercice - Fonctions logarithmiquement convexes

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *logarithmiquement convexe* lorsque f est à valeurs strictement positives et que la fonction composée notée $\ln f : x \mapsto \ln f(x)$ est convexe sur I .

1) EXEMPLE.

-a- Montrer que la fonction cosinus hyperbolique, notée ch , est logarithmiquement convexe sur \mathbb{R} .

-b- En déduire les inégalités suivantes :

$$(I_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{ch} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \text{ch}(x_k)}.$$

$$(I_2) \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{ch}(a+x) \geq \text{ch}(a) e^{x \text{th}(a)}.$$

2) Montrer que tout produit de deux fonctions logarithmiquement convexes est logarithmiquement convexe.

3) UNE CONDITION NÉCESSAIRE.

-a- Montrer que toute fonction logarithmiquement convexe est aussi convexe.

-b- Donner, en justifiant sa validité, un exemple simple de fonction qui soit convexe et strictement positive sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, mais qui ne soit pas logarithmiquement convexe.

4) FONCTIONS DEUX FOIS DÉRIVABLES. Notons $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur I .

-a- Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$ à valeurs strictement positives. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(P₁) f est logarithmiquement convexe ;

(P₂) $\forall x \in I, f'(x)^2 - f(x)f''(x) \leq 0$;

(P₃) $\forall x \in I, \forall t \in \mathbb{R}, t^2 f''(x) + 2t f'(x) + f(x) \geq 0$.

Indication : pour (P₃), on pourra considérer le discriminant d'un trinôme.

-b- En déduire que l'ensemble des fonctions logarithmiquement convexes de $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$ est stable par addition.

5) UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs strictement positives.

On note (C) la condition suivante : pour tout $m \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-mx}$ est convexe sur I .

-a- Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors elle vérifie la condition (C).

-b- Montrer que pour tout $(a, b) \in I^2$, il existe $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-(mx+p)}$ vérifie

$$g(a) = g(b) = 1.$$

En déduire que si f vérifie la condition (C), alors elle est logarithmiquement convexe.