MPSI/MP2I – Devoir Surveillé n° 6

Mercredi 5 février 2025

Durée : 4 heures

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

— chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie

— chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème

— toute question amène une réponse qui doit être encadrée

— les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français

— les notations de l'énoncé doivent être respectées

— les copies doivent être numérotées

— on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés

— on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

1 Problème - Classe $\mathcal{C}^1$ des fonctions $\sqrt{f}$

Dans ce problème on s'intéresse à la dérivabilité et la classe $\mathcal{C}^1$ des fonctions $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ que l'on notera, de façon abusive, $\sqrt{f}$, où f est une fonction positive.

Dans les questions 1), 2) et 3) indépendantes de la suite, on étudie quelques exemples.

Dans la question 4), on établit la formule de Taylor-Lagrange, utile dans la suite du problème.

Dans les questions suivantes, on établit un certain nombre de résultats qui livreront en question 8) des conditions suffisantes pour qu'une fonction $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1) **Question de cours** : à l'aide du taux d'accroissement, montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et n'est pas dérivable en 0.
   Puis que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Soit f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas. Montrer que $g = \sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3) Des exemples de fonction de la forme $\sqrt{f}$ où f s'annule.
   - -a- Donner un exemple simple d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 telle que $\sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - -b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $g_1(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$ et $g_2(x) = \sqrt{\sin(x^4)}$
     - -i- Montrer que g_1 et g_2 sont continues sur $[-1, 1]$ et sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$.
     - -ii- A l'aide du théorème de la limite de la dérivée, étudier la classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ des fonctions g_1 et g_2.
4) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $h \in \mathcal{C}^2([a, b])$. On pose :

$$A = \frac{2}{(b-a)^2}\left(h(b) - h(a) - (b-a)h'(a)\right)$$

et :

$$\varphi : \quad [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto h(b) - h(x) - (b-x)h'(x) - \frac{(b-x)^2}{2}A.$$

   - -a- Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et que $\varphi(a) = \varphi(b)$.
   - -b- En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$h(b) = h(a) + (b-a)h'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}h''(c).$$

     Ce résultat est appelé formule de Taylor-Lagrange.
     On admettra que cette formule reste vraie si $b \leqslant a$.

Dans la suite du problème f est une fonction positive, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On pose $g = \sqrt{f}$.

5) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Montrer g est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0.

6) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

   -a- Montrer que f admet un extremum local en x_0. En déduire la valeur de $f'(x_0)$.

   -b- Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$, il existe c compris entre x_0 et x tel que :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c).$$

   En déduire que si $f''(x_0) \neq 0$ alors $f''(x_0) > 0$ et la fonction $g = \sqrt{f}$ n'est pas dérivable en x_0.

7) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$.
   Soit $r > 0$, on pose : $I_r = [x_0 - r, x_0 + r]$ et $I_{2r} = [x_0 - 2r, x_0 + 2r]$.
   Le but de cette question est de prouver que :

$$\forall x \in I_r, \quad |f'(x)| \leqslant \sqrt{2f(x) \cdot \sup_{t \in I_{2r}} |f''(t)|} \quad (\star).$$

   -a- Justifier l'existence de $\sup\limits_{t \in I_{2r}} |f''(t)|$.

   -b- Montrer que :

$$\forall x \in I_r, \quad |f'(x)| \leqslant r \sup_{t \in I_{2r}} |f''(t)|.$$

   -c- Montrer que si $\sup\limits_{t \in I_{2r}} |f''(t)| = 0$ alors l'inégalité $(\star)$ est vérifiée.

   -d- On suppose dans la suite que $\sup\limits_{t \in I_{2r}} |f''(t)| \neq 0$.
   Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x \in I_r$ tel que $(\star)$ n'est pas vérifiée.
   On pose alors le trinôme en λ :

$$\tau(\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} \sup_{t \in I_{2r}} |f''(t)|.$$

   -i- Montrer que le discriminant du trinôme est strictement positif.

   -ii- En déduire que le trinôme admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2 telles que $\mu = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ appartient à l'intervalle $[-r, r]$.
   Puis, à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec des points bien choisis, montrer que :

$$f(x + \mu) \leqslant \tau(\mu) < 0.$$

   -iii- Conclure la démonstration de l'inégalité $(\star)$.

8) Déduire des questions précédentes que, si f est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f'' s'annule en tous les zéros de f (s'il en existe), alors $g = \sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2 Problème - Une équation de Bézout polynomiale

Dans tout ce problème, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On s'intéresse aux solutions $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ de l'équation de Bézout :

$$(1 - X)^n U + X^n V = 1. \tag{1}$$

Partie I. Structure des solutions de (1)

1) Existence de solutions.

   -a- Justifier que l'équation (1) admet au moins un couple solution.

   -b- Déterminer explicitement un couple solution pour $n = 2$.

2) Supposons qu'on dispose de $(U_0, V_0) \in \mathbb{R}[X]^2$ une solution particulière de l'équation (1).

   -a- Montrer que pour toute solution $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$, le polynôme $U - U_0$ est divisible par X^n.

-b- En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (1) dans $\mathbb{R}[X]^2$ est :

$$\left\{\left(U_0 + X^n Q,\ V_0 - (1-X)^n Q\right)\ :\ Q \in \mathbb{R}[X]\right\}.$$

-c- Prouver qu'il existe *au plus une* solution dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$.

3) Solution fondamentale.

-a- Déterminer une solution $(F, G) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ en développant $\left((1-X)+X\right)^{2n-1}$.
On exprimera F et G sous forme de sommes qu'on ne cherchera pas à simplifier.

-b- Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

-c- Démontrer que $G = F \circ (1-X)$.

-d- En déduire $F(\frac{1}{2})$.

Partie II. Équation différentielle vérifiée par F

Dans toute la suite du problème, on suppose que $n \geqslant 2$.

1) On rappelle que (F, G) est un couple de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ qui vérifie $(1-X)^n\, F + X^n\, G = 1$.

-a- En dérivant cette relation, montrer que $(1-X)F' - nF$ est divisible par X^{n-1}.

-b- En déduire que F vérifie l'équation différentielle formelle suivante :

$$(X-1)F' + n\,F = n\binom{2n-1}{n}X^{n-1}. \tag{2}$$

-c- Montrer alors que F est de degré $n-1$ et que son coefficient dominant est $\dbinom{2n-2}{n-1}$.

2) Notons $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les coefficients de F, de sorte que $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, X^k$.

-a- Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. À l'aide de l'équation (2), exprimer a_{k+1} en fonction de a_k.

-b- En déduire que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$a_k = \binom{k+n-1}{k}.$$

3) Déduire de ce qui précède les deux égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+n-1}{k} = \binom{2n-1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\binom{2n-1}{k} = \binom{2n-2}{n-1}.$$

Partie III. Racines de F

Dans cette partie, on suppose toujours $n \geqslant 2$.

1) À l'aide de l'équation différentielle (2) ci-dessus, montrer que F est à racines simples dans $\mathbb{C}$.

2) On considère le polynôme $P = (1-X)^n\, F$. Montrer que son polynôme dérivé P' se décompose sous la forme suivante pour un certain réel λ_n strictement positif

$$P' = (-1)^n \lambda_n\, X^{n-1}(X-1)^{n-1}.$$

3) Dans cette question, on suppose que n est pair.

-a- Dresser le tableau de variation complet de la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ sur $\mathbb{R}$.

-b- En déduire que le polynôme F admet une unique racine réelle et préciser son signe.

4) On suppose à présent que n est impair. En adaptant la méthode proposée à la question précédente, déterminer le nombre de racines réelles de F.

3 Problème - Étude d'une suite implicite

Posons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

Dans ce problème, nous confondrons un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée et nous admettrons que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

1) -a- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n' = S_{n-1}.$$

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle si n est impair. (On pourra faire une démonstration par récurrence.) Posons :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad P_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{X^k}{k!}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons α_n l'unique racine réelle de P_n.

-a- Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que α_n est racine simple de P_n.

-b- -i- Montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 + \frac{X}{2k+1}\right).$$

-ii- En déduire que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ -(2n+1) \leqslant \alpha_n \leqslant -1.$$

-c- -i- Montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \frac{\alpha_n}{2n+3}\right).$$

-ii- En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

-d- On suppose, dans cette question, que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

-i- Montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ |P_n(\alpha_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^{-\ell}(\alpha_n - \ell)$$

-ii- En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(\alpha_n) = e^{\ell}$$

-iii- Aboutir à une contradiction.

-e- En déduire la nature et la limite de la suite (α_n).