MPSI/MP2I – Devoir Surveillé 6
Mercredi 5 février
Corrigé

1 Problème - Classe $\mathcal{C}^1$ des fonctions $\sqrt{f}$

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$,

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

La limite est finie donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en a.
Puis pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $\boxed{x \mapsto \sqrt{x} \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.
Et $\boxed{x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ de dérivée, $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
En particulier $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas, donc par quotient $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par conséquent $\boxed{x \mapsto \sqrt{x} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

2) Soit f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, or $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors par composition, $\boxed{\sqrt{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

3) -a- $\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto x^4 \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et s'annule en } 0}$. Et pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^4} = x^2$ donc $\boxed{\sqrt{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

-b- Pour $x \in [-1,1]$, on pose $g_1(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$ et $g_2(x) = \sqrt{\sin(x^4)}$

-i- Par composition $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et pour tout $x \in [-1,1]$

$$x^2 \in [0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{donc} \qquad \sin(x^2) \in \mathbb{R}_+ \text{ et ne s'annule qu'en } 0.$$

Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $\boxed{\text{par composition } g_1 \text{ est continue sur } [-1,1] \text{ et est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [-1,0[\cup]0,1]. \text{ De même pour } g_2}$.

-ii- Pour $x \in [-1,0[\cup]0,1]$,

$$g_1'(x) = \frac{2x\cos(x^2)}{2\sqrt{\sin(x^2)}} = \frac{x\cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}}.$$

Or $\cos(x^2) \underset{0}{\sim} 1$ et $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ d'où

$$g_1'(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{|x|} \qquad \text{donc} \qquad g_1'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x \to 0_+ \\ -1 & \text{si } x \to 0_- \end{cases}.$$

Les régularités établies en 3)-b-i- et l'existence des limites à gauche et à droite de g_1' en 0 permettent d'appliquer le théorème de la limite de la dérivée et prouve la dérivabilité à gauche et à droite de g_1 en 0, de nombre dérivé différent à gauche et à droite donc $\boxed{g_1 \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ et $\boxed{g_1 \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [-1,1]}$.

Pour $x \in [-1,0[\cup]0,1]$,

$$g_2'(x) = \frac{4x^3\cos(x^4)}{2\sqrt{\sin(x^4)}} = \frac{2x^3\cos(x^4)}{\sqrt{\sin(x^4)}}.$$

Or $\cos(x^4) \underset{0}{\sim} 1$ et $\sin(x^4) \underset{0}{\sim} x^4$ d'où

$$g_2'(x) \underset{0}{\sim} \frac{2x^3}{x^2} = 2x \qquad \text{donc} \qquad g_2'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Le théorème de la limite de la dérivée s'applique encore et prouve la dérivabilité de g_2 en 0 et la continuité de la dérivée en 0 donc $\boxed{g_2 \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [-1,1]}$.

4) -a- h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ donc h et h' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et donc par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,b]}$.
Puis

$$\varphi(a) = h(b) - h(a) - (b-a)h'(a) - \frac{(b-a)^2}{2}\frac{2}{(b-a)^2}\left(h(b) - h(a) - (b-a)h'(a)\right) = 0$$

$$\varphi(b) = 0.$$

Donc $\boxed{\varphi(a) = \varphi(b)}$.

-b- D'après 4)-a-, φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
Or

$$\varphi'(c) = -h'(c) + h'(c) - (b-c)h''(c) + (b-c)A = (b-c)(A - h''(c)).$$

Or $b - c \neq 0$ et $\varphi'(c) = 0$ donc $h''(c) = A$, qui donne comme voulu

$$\boxed{h(b) = h(a) + (b-a)h'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}h''(c)}.$$

Dans la suite du problème f est une fonction positive, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On pose $g = \sqrt{f}$.

5) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Comme f est positive alors $f(x_0) > 0$. Or f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement positive au voisinage de x_0, de plus y est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc par composition avec $x \mapsto \sqrt{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\boxed{g \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^1 \text{ au voisinage de } x_0}$.

6) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

-a- Comme f est positive et $f(x_0) = 0$ alors f admet un minimum local en x_0. Comme f est dérivable en x_0 qui est intérieur à $\mathbb{R}$ alors $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

-b- Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$. On applique la formule de Taylor Lagrange à f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $a = x_0$ et $b = x$, il existe c compris entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c).$$

Comme $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, alors comme voulu

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)}.$$

Supposons que $f''(x_0) \neq 0$. Par l'absurde supposons que $f''(x_0) < 0$.
Comme c est compris entre x_0 et x alors d'après le théorème des gendarmes

$$c \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} x_0.$$

Donc par continuité de f'',

$$f''(c) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f''(x_0).$$

$f''(c)$ admet donc une limite strcitement positive en x_0, donc $f''(c) < 0$ au voisinage de x_0, cela contredit $(x - x_0)^2 > 0$ et $f \geqslant 0$ dans l'égalité ci-dessus. D'où $\boxed{f''(x_0) > 0}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$,

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{f(x)}}{x - x_0} = \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\frac{\sqrt{f(x)}}{|x - x_0|} = \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\sqrt{\frac{f(x)}{(x - x_0)^2}} = \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\sqrt{\frac{f''(c)}{2}}.$$

D'où, comme $f''(c) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f''(x_0)$ et $\dfrac{|x-x_0|}{x-x_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > x_0 \\ -1 & \text{si } x < x_0 \end{cases}$ alors

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}} & \text{si } x \to x_{0+} \\ -\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}} & \text{si } x \to x_{0-} \end{cases}$$

Les limites sont différentes car $f''(x_0) > 0$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } x_0}$.

7) -a- f'' est continue sur le segment I_{2r} donc f'' est bornée sur I_{2r} et donc $\boxed{\sup\limits_{t\in I_{2r}} |f''(t)| \text{ existe}}$.

-b- f' est dérivable sur I_r et

$$\forall x \in I_r, \quad |(f')'(x)| \leqslant \sup_{t\in I_r} |f''(t)| \leqslant \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)| \qquad \text{car } I_r \subset I_{2r}.$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, f' est lipschitzienne sur I_r, en particulier :

$$\forall x \in I_r, \qquad |f'(x) - f'(x_0)| \leqslant r \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)| \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\forall x \in I_r, \qquad |f'(x)| \leqslant r \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|}.$$

-c- Supposons que $\sup\limits_{t\in I_{2r}} |f''(t)| = 0$.

Comme :

$$\forall t \in I_{2r}, \qquad |f''(t)| \leqslant \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|$$

alors

$$\forall t \in I_{2r}, \qquad f''(t) = 0.$$

Donc f' est constante sur I_{2r}. Comme $f'(x_0) = 0$ alors f' est nulle sur I_{2r}. Et donc $\boxed{\text{l'inégalité } (\star) \text{ est vérifiée}}$.

-d- On suppose que $\sup\limits_{t\in I_{2r}} |f''(t)| \neq 0$.

Par l'absurde, suppose qu'il existe $x \in I_r$ tel que $(\star)$ n'est pas vérifiée c'est-à-dire

$$|f'(x)| > \sqrt{2f(x) \cdot \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|} \quad (\square).$$

On pose le trinôme en λ :

$$\tau(\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|,$$

-i- Le discriminant du trinôme est :

$$\Delta = (f'(x))^2 - 2f(x) \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|.$$

Par hypothèse $(\square)$ que l'on élève au carré, $\boxed{\Delta > 0}$.

-ii- Le dicriminant étant strictement positif, posons λ_1 et λ_2 ses deux racines réelles distinctes.

On pose $\mu = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$. D'après les formules de Viète,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{f'(x)}{\frac{\sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|}{2}} \qquad \text{donc} \qquad \mu = -\frac{f'(x)}{\sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|}.$$

Donc d'après 7)-b-, $|\mu| \leqslant r$ c'est-à-dire $\boxed{\mu \in [-r, r]}$.

τ est un trinôme donc le coefficient de degré 2 est strictement positif, il admet donc un minimum strictement négatif atteint en le milieu de $[\lambda_1, \lambda_2]$ donc $\boxed{\tau(\mu) < 0}$.

Enfin on applique la formule de Taylor-Lagrange à f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, en $a = x + \mu$ et $b = x$ où $x \in I_r$; il existe c compris entre x et $x + \mu$ tel que

$$f(x+\mu) = f(x) + \mu f'(x) + \frac{\mu^2}{2} f''(c).$$

Or $\tau(\mu) = f(x) + \mu f'(x) + \dfrac{\mu^2}{2} \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|$, d'où

$$f(x+\mu) = \tau(\mu) - \frac{\mu^2}{2} \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)| + \frac{\mu^2}{2} f''(c) = \tau(\mu) + \frac{\mu^2}{2}\left(f''(c) - \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)| \right).$$

Or c est compris entre x et $x+\mu$ et $\mu \in [-r, r]$ donc $|c - x| \leqslant |\mu| \leqslant r$.
Donc $|c - x_0| = |(c-x) + (x - x_0)| \leqslant |c - x| + |x - x_0| \leqslant 2r$ car $|x - x_0| \leqslant r$ (découlant de $x \in I_r$).
Par conséquent $c \in I_{2r}$, donc

$$f''(c) - \sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)| \leqslant 0$$

que l'on reporte dans l'égalité ci-dessus pour obtenir,

$$\boxed{f(x+\mu) \leqslant \tau(\mu)}.$$

-iii- D'après les inégalités précédentes, $f(x+\mu) < 0$, ce qui contredit la positivité de f. D'où l'absurdité attendue. $\boxed{\text{L'inégalité } (\star) \text{ est donc prouvée}}$

8) Soit f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

— Si $f(x_0) \neq 0$ alors d'après 5), g est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0.
— Si $f(x_0) = 0$. On suppose que $f''(x_0) = 0$. D'après 6)-a-, on a aussi, $f'(x_0) = 0$.
Par le même calcul, qu'en 6)-b-, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$, il existe c compris entre x et x_0,

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\sqrt{\frac{f''(c)}{2}}.$$

Puis

$$f''(c) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f''(x_0)$$

(raisonnement vu en 6)-b- également) et $\dfrac{|x-x_0|}{x-x_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > x_0 \\ -1 & \text{si } x < x_0 \end{cases}$, donc

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x \to x_{0+} \\ 0 & \text{si } x \to x_{0-} \end{cases}.$$

Les limites sont égales $\boxed{g \text{ est dérivable en } x_0 \text{ avec } g'(x_0) = 0}$.
Montrons enfin la continuité de g' en x_0. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$,

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \neq 0 \quad \text{(comme le cas } f(x_0) \text{ ci-dessus)} \end{cases}.$$

On utilise $(\star)$. On pose $r > 0$, alors pour $x \in I_r$, si $f(x) \neq 0$,

$$\frac{|f'(x)|}{2\sqrt{f(x)}} \leqslant \sqrt{\sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|} \qquad \text{donc} \qquad |g'(x)| \leqslant \sqrt{\sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)|}.$$

Et si $f(x) = 0$, comme alors $g'(x) = 0$ et cette dernière inégalité est aussi vérifiée.
Posons $\varepsilon > 0$. Comme f'' est continue en x_0 alors par définition de la limite, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall t \in [x_0 - 2r, x_0 + 2r], \quad |f''(t) - f''(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Or $f''(x_0) = 0$, donc cette inégalité se réécrit $\sup_{t\in I_{2r}} |f''(t)| \leqslant \varepsilon$, que l'on reporte dans l'inégalité sur $|g'(x)|$ ci-dessus :

$$\forall t \in [x_0 - 2r, x_0 + 2r], \quad |g'(x)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

On a donc bien $g'(x_0) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ et $g'(x_0) = 0$. Donc g' est bien continue en x_0.

Bilan : $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2 Problème - Une équation de Bézout polynomiale

Partie I.

1) -a- Les polynômes $1-X$ et X sont premiers entre eux. Donc $(1-X)^n \wedge X = 1$ par produit d'éléments premiers avec X. Puis $(1-X)^n \wedge X^n = 1$ par produit d'éléments premiers avec $(1-X)^n$.

D'après le théorème de Bézout, $\boxed{\text{il existe donc } (U,V) \in \mathbb{R}[X]^2 \text{ tel que } (1-X)^n U + X^n V = 1.}$

-b- On applique l'algorithme d'Euclide étendu sous forme tabulaire :

	$X^2 - 2X + 1$	1	0
(-1)	X^2	0	1
$(+\frac{X}{2})$	$-2X+1$	1	-1
$(+4)$	$\frac{X}{2}$	$\frac{X}{2}$	$1-\frac{X}{2}$
	1	$2X+1$	$-2X+3$

On conclut alors en posant $U = 2X+1$ et $V = -2X+3$.

2) -a- Soit (U,V) une solution. En particulier $(1-X)^n U + X^n V = (1-X)^n U_0 + X^n V_0$

Donc $(1-X)^n(U-U_0) = X^n(V_0 - V)$ est divisible par X^n. Or $(1-X)^n \wedge X^n = 1$, donc $\boxed{X^n \text{ divise } U - U_0}$ par théorème de Gauss.

-b- $(\subset)$ Soit (U,V) une solution. D'après la question précédente, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U - U_0 = X^n Q$. Mais alors $(1-X)^n X^n Q = X^n(V_0 - V)$ donc $X^n\left[(1-X)^n Q - V_0 + V\right] = 0$. Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre, le deuxième facteur est nul : il vient $V = V_0 - (1-X)^n Q$.

$(\supset)$ Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors $(U_0 + X^n Q, V_0 - (1-X)^n Q)$ est bien solution car :

$$(1-X)^n(U_0 + X^n Q) + X^n(V_0 - (1-X)^n Q) = (1-X)^n U_0 + X^n V_0 + 0 = 1.$$

-c- Soit (U,V) une solution dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$. D'après la question précédente, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$U_0 = -X^n Q + U, \quad V_0 = (1-X)^n Q + V.$$

Or $\deg U < n$ et $\deg V < n$. $\boxed{\text{Donc } U, V \text{ sont déterminés par unicité de la division euclidienne.}}$

3) -a- Cette puissance vaut 1 car $(1-X) + X = 1$. D'autre part l'anneau $\mathbb{R}[X]$ est commutatif donc la formule du binôme de Newton peut s'appliquer :

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{2n-1-k} X^k = 1.$$

On peut regrouper les termes en deux paquets selon que $k \leqslant n-1$ ou $k \geqslant n$. En posant

$$\boxed{F = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{n-1-k} X^k}, \quad \boxed{G = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{2n-1-k} X^{k-n}}$$

on obtient donc $(1-X)^n F + X^n G = 1$. De plus $\deg F \leqslant n-1$ par somme de polynômes où :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \deg\left((1-X)^{n-1-k} X^k\right) = (n-1-k) + k = n-1.$$

De même $\deg G \leqslant n-1$ par somme de polynômes où :

$$\forall k \in [\![n, 2n-1]\!], \quad \deg\left((1-X)^{2n-1-k} X^{k-n}\right) = (2n-1-k) + (k-n) = n-1.$$

On a donc bien $\boxed{(F,G) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2}$.

-b- En évaluant dans la formule ci-dessus, il reste un seul terme à chaque fois :

$$F(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} 0^k = \binom{2n-1}{0} = 1, \qquad F(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} 0^{n-1-k} = \binom{2n-1}{n-1}.$$

Donc $\boxed{F(0) = 1 \text{ et } F(1) = \binom{2n-1}{n-1}}$

-c- Un simple calcul par changement d'indice avec les formules précédentes est possible.
Mais voici une autre méthode : la composition de $(1-X)^nF + X^nG$ par $1-X$ donne la relation

$$X^nF(1-X) + (1-X)^nG(1-X) = 1.$$

De plus $F(1-X)$ et $G(1-X)$ sont de mêmes degrés que F et G. Par unicité de la solution dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$G(1-X) = F \quad \text{et} \quad \boxed{F(1-X) = G.}$$

-d- D'après la question précédente $(1-X)^nF(X) + X^nF(1-X) = 1$. L'évaluation en $\frac{1}{2}$ donne alors :

$$\tfrac{1}{2^n}F(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2^n}F(\tfrac{1}{2}) = 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{F(\tfrac{1}{2}) = 2^{n-1}.}$$

Partie II. Équation différentielle vérifiée par F

1) -a- Par égalité des polynômes dérivés :

$$-n(1-X)^{n-1}F + (1-X)^nF' + nX^{n-1}G + X^nG' = 0,$$

donc $(1-X)^{n-1}[(1-X)F' - nF] = -X^{n-1}[XG' + nG]$ est divisible par X^{n-1}. Comme déjà vu, les polynômes $X^{n-1} \wedge (1-X)^{n-1} = 1$. Donc $\boxed{X^{n-1} \text{ divise } (1-X)F' - nF \text{ par théorème de Gauss.}}$

-b- Comme $F \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, le degré de $(X-1)F' + n\,F$ est au plus $n-1$ aussi. Compte tenu de la question précédente il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(X-1)F' + nF = \lambda X^{n-1}$. L'évaluation en 1 donne $0 + nF(1) = \lambda$, d'où le coefficient dominant :

$$\lambda = nF(1) = \boxed{n\binom{2n-1}{n-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\deg F = n-1.}$$

-c- Le polynôme $(X-1)F' + nF$ est de degré $n-1$. Par majoration du degré d'une somme, $(X-1)F'$ ou nF est donc de degré supérieur ou égal à $n-1$. Or $F \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\deg F$ est exactement $n-1$.
Notons a_{n-1} le coefficient dominant de F. Les coefficients de degré $n-1$ de $(X-1)F'$ et nF sont respectivement $1 \times (n-1)a_{n-1}$ et na_{n-1}. Par somme, on obtient :

$$n\binom{2n-1}{n-1} = (2n-1)a_{n-1}, \quad \text{d'où} \quad a_{n-1} = \frac{n}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \boxed{\binom{2n-2}{n-1}.}$$

2) -a- Par définition du polynôme dérivée et manipulations de sommes :

$$\begin{aligned}(X-1)F' &= (X-1)\sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^k - \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}X^k.\end{aligned}$$

En ajoutant nF, il vient donc :

$$(X-1)F' + nF = (2n-1)a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+n)a_k - (k+1)a_{k+1}\right]X^k - a_1$$

Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. Par unicité des coefficients, on obtient $(n+k)a_k - (k+1)a_{k+1} = 0$, d'où :

$$\boxed{a_{k+1} = \frac{k+n}{k+1}a_k.}$$

-b- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On sait que $a_0 = F(0) = 1$ d'après la question I.3)-b-. La formule ci-dessus donne alors par récurrence immédiate :

$$a_k = \frac{k-1+n}{k} \times \frac{k-2+n}{k-1} \times \cdots \times \frac{0+n}{0+1} a_0 = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\,k!} = \boxed{\binom{k+n-1}{k}.}$$

3) Pour la première somme, on reconnaît $F(1)$ qui a été calculé en I.3)-b- :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, 1^k = F(1) = \binom{2n-1}{n-1} = \boxed{\binom{2n-1}{n}.}$$

La deuxième somme est liée à la formule établie pour F à la question I.3)-a- :

$$\begin{aligned} F &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{n-1-k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (-1)^{n-1-k} (X-1)^{n-1-k} X^k. \end{aligned}$$

Comme les $(X-1)^{n-1-k}X^k$ sont tous unitaires de degré $n-1$, le coefficient dominant de F est

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (-1)^{n-1-k} = \binom{2n-2}{n-1}} \quad \text{d'après II.1)-c-.}$$

Partie III. Racines de F

Dans cette partie, on suppose toujours $n \geqslant 2$.

1) Supposons que F admette un racine $z \in \mathbb{C}$ de multiplicité $m \geqslant 2$ et cherchons une contradiction. D'après la caractérisation par les dérivées $F(z) = F'(z) = 0$. Donc $z^{n-1} = 0$ compte tenu de l'équation différentielle (2). Or $n \geqslant 2$ donc $z = 0$. Mais ceci est absurde car $F(0) = 1 \neq 0$. Par conséquent, toute racine est de multiplicité 1.

2) Le calcul de P' a déjà été vu à la question II.1)-a- et donne :

$$\begin{aligned} P' &= -n(1-X)^{n-1}F + (1-X)^n F' \\ &= -(1-X)^{n-1}\left[nF - (1-X)F'\right] \\ &= \boxed{(-1)^n \lambda_n (X-1)^{n-1} X^{n-1}} \qquad \text{où } \lambda_n = n\binom{2n-1}{n-1} \text{ d'après II.1)-c-.} \end{aligned}$$

3) Dans cette question, on suppose que n est pair.

-a- La fonction $\widetilde{P}$ est dérivable car polynomiale. Sachant que n est pair :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{P}'(x) = (-1)^n \lambda_n (x-1)^{n-1} x^{n-1} = \lambda_n \big(x(x-1)\big)^{n-1}.$$

Comme $n-1$ est impair, $\widetilde{P}'(x)$ est de même signe que $x(x-1)$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $\widetilde{P}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de $\widetilde{P}$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$

Les valeurs en 0 et 1 s'obtiennent par :

$$P(0) = (1-0)^n F(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0^n F(1) = 0.$$

Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent par équivalence avec le terme dominant :

$$\widetilde{P}(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} x^n \times a_{n-1} x^{n-1} \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_{n-1}\, x^{2n-1} \quad \text{où} \quad a_{n-1} = \binom{2n-2}{n-1} > 0.$$

-b- D'une part, 1 n'est pas racine de F car $F(1) > 0$ d'après I.3)-b-. D'autre part, tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ vérifie $P(x) = (x-1)^n F(x)$ et $(1-x)^n \neq 0$, donc x est racine de P si et seulement si x est racine de F.

• Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction $\widetilde{P}$ est continue et strictement croissante. Donc elle réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ dans $]-\infty, 1[$ d'après les limites. Or $0 \in]-\infty, 1[$ donc il existe $x \in]-\infty, 0[$ unique tel que $\widetilde{P}(x) = 0$.

• Sur les intervales $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ la fonction $\widetilde{P}$, est strictement positive donc ne s'annule pas.

En conclusion, $\boxed{F \text{ admet une unique racine réelle et celle-ci est négative.}}$

4) Dans ce cas $n-1$ est pair et on aura, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{P}'(x) = -\lambda_n \big(x(x-1)\big)^{n-1}$$

donc $\widetilde{P}'$ est négative sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'aux deux points 0 et 1. Par conséquent $\widetilde{P}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Or $\widetilde{P}$ s'annule en 1, donc elle ne s'annule nulle part ailleurs. $\boxed{\text{Cette fois } F \text{ n'admet aucune racine réelle.}}$

Problème - Étude d'une suite implicite

1) -a- Soit n un entier naturel non nul,

$$\begin{aligned} S_n' &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{X^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{X^l}{l!} \quad \text{(en posant } l = k-1) \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n' = S_{n-1}}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : "le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle si n est impair" et montrons $\mathcal{P}_n$ pour tout entier naturel n en raisonnant par récurrence.

Initialisation : Puisque $S_0 = 1$, alors $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n appartenant à n tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

— Si n est pair, alors S_n n'a pas de racine réelle. Si S_n devait changer de signe, alors le théorème des valeurs intermédiaires impliquerait l'existence d'une racine réelle pour S_n, donc S_n est de signe constant strict.
Comme $S_n(0) = 1$, alors nous en déduisons que S_n est à valeurs strictement positives, et donc S_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque S_{n+1} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors la fonction S_{n+1} réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $S_n(\mathbb{R})$.
Comme $n+1$ est impair, alors les limites de S_{n+1} en $\pm\infty$ sont opposées et donc S_{n+1} réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, S_{n+1} possède une unique racine réelle.

— Si n est impair, alors S_n, *i.e.* S_{n+1}' possède une unique racine réelle. Notons la a_n
Soit x appartenant à $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n \to -\infty} S_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, alors $S_n(x) < 0$ pour $x < a_n$, tandis que $S_n(x) > 0$ pour $x > a_n$. On en déduit que S_{n+1} est décroissant sur $]-\infty, a_n]$, puis croissant sur $[a_n, +\infty[$. Or,

$$S_{n+1}(a_n) = S_n(a_n) + \frac{a_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0 + \frac{a_n^{n+1}}{(n+1)!}$$

Mais $a_n \neq 0$ (car $S_n(0) = 1$), et $n+1$ est pair donc $a_n^{n+1} > 0$. Nous en en déduisons que $S_{n+1}(a_n) > 0$, puis que S_{n+1} est toujours strictement positif sur $\mathbb{R}$. Ainsi S_{n+1} ne possède pas de racine réelle.

Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n \text{ est vraie}}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons α_n l'unique racine réelle de P_n.

-a- Soit n un entier naturel, alors remarquons que : $S_{2n+1} = S_{2n} + \dfrac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}$, autrement dit :

$$S_{2n+1} = S'_{2n+1} + \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

D'où :

$$0 = S_{2n+1}(\alpha_n) = S'_{2n+1}(\alpha_n) + \frac{\alpha_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Si α_n était racine d'ordre de multiplicité au moins 1, alors on aurait $S'_{2n+1}(\alpha_n) = 0$, et donc $\dfrac{\alpha_n^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, ce qui implique que $\alpha_n = 0$. Or $S_{2n+1}(0) = 1$, et donc $\boxed{\alpha_n \text{ est racine simple de } P_n}$.

-b- -i- Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Séparons les termes d'indices pairs et impairs :

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{X^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \times \frac{X}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 + \frac{X}{2k+1}\right) \end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 + \frac{X}{2k+1}\right)$.

-ii- Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Appliquons l'égalité de la question précédente :

$$P_n(-(2n+1)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-(2n+1))^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\left(1 + \frac{-(2n+1)}{2k+1}\right)}_{\leqslant 0} \leqslant 0,$$

car pour tout k appartenant à $[\![0, n]\!],\ 2k+1 \leqslant 2n+1$, donc $\dfrac{2n+1}{2k+1} \leqslant 1$ et $(-(2n+1))^{2k} \geqslant 0$ car $2k$ est pair. De même,

$$P_n(-1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\left(1 + \frac{-1}{2k+1}\right)}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

car pour tout k appartenant à $[\![0, n]\!],\ 2k+1 \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{2k+1} \leqslant 1$ et $(-1)^{2k} = 1 \geqslant 0$

Puisque $P_n(-(2n+1) \leqslant P_n(\alpha_n) \leqslant P_n(-1)$. Nous avons vu à la question 1) -b- que S_{2n+1} est strictement croissante, ainsi $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ -(2n+1) \leqslant \alpha_n \leqslant -1}$.

-c- -i- Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, toujours d'après la question 2) -b- -i- :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\alpha_n) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha_n^{2k}}{(2k)!} \left(1 + \frac{\alpha_n}{2k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_n^{2k}}{(2k)!} \left(1 + \frac{\alpha_n}{2k+1}\right) + \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \frac{\alpha_n}{2n+3}\right) \\ &= P_n(\alpha_n) + \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \frac{\alpha_n}{2n+3}\right) \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure : $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \dfrac{\alpha_n}{2n+3}\right)}$.

-ii- Soit n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n &\iff P_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leqslant P_{n+1}(\alpha_n)\\ &\iff 0 \leqslant P_{n+1}(\alpha_n)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $P_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1+\dfrac{\alpha_n}{2n+3}\right)$.
Or, d'après l'avant dernière question, $-(2n+1) \leqslant \alpha_n$, donc :

$$1-\frac{2n+1}{2n+3} \leqslant 1+\frac{\alpha_n}{2n+3}$$

et ainsi :

$$\frac{2}{2n+3} \leqslant 1+\frac{\alpha_n}{2n+3}$$

Comme $2n+2$ est pair, $\dfrac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0$, et donc :

$$\underbrace{\frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{2}{2n+3}}_{\geqslant 0} \leqslant \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1+\frac{\alpha_n}{2n+3}\right).$$

Ainsi $P_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 0$ et $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

-d- On suppose, dans cette question, que la suite (α_n) est convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

-i- Soient n appartenant à $\mathbb{N}$ et x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$. Alors la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, en effet :

$$\begin{aligned}S_{n+1}(x) - S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\\ &= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\geqslant 0}\end{aligned}$$

L'énoncé nous demande d'admettre que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = e^x$. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et tend vers sa borne supérieure e^x, autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad S_n(x) \leqslant e^x.$$

Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et supposée convergente de limite ℓ, alors toujours d'après le théorème de la limite monotone, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par ℓ. Comme d'après la question 2) -b- -ii-, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement négatives, donc $\ell < 0$.
Sur l'intervalle $[\ell, \alpha_n]$, la fonction P_n est dérivable et sa dérivée P_n' est égale à S_{2n+1}', soit S_{2n} (cf question 1) -a-). D'après ce qui précède et l'inégalité triangulaire :

$$\forall\, x \in [\ell, \alpha_n],\ |S_{2n}(x)| \leqslant S_{2n}(|x|) \leqslant e^{|x|} \leqslant e^{-\ell}.$$

L'inégalité des accroissements finis permet alors d'affirmer que :

$$\boxed{|P_n(\alpha_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^{-\ell}(\alpha_n - \ell)}.$$

-ii- Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Encore d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|P_n(\alpha_n) - e^\ell\right| &= \left|P_n(\alpha_n) - P_n(\ell) + P_n(\ell) - e^\ell\right|\\ &\leqslant |P_n(\alpha_n) - P_n(\ell)| + \left|P_n(\ell) - e^\ell\right|\end{aligned}$$

Puisque nous supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\ell) = e^\ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}(\ell) = e^\ell$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell) = e^\ell$.
Puisque nous supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\ell}(\alpha_n - \ell) = 0$, et donc d'après la question précédente et un corollaire du théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |P_n(\alpha_n) - P_n(\ell)| = 0$.
Finalement, par somme de suites tendant vers 0, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(|P_n(\alpha_n - P_n(\ell)| + \left|P_n(\ell) - e^\ell\right|\right) = 0$ et toujours d'après le même corollaire du théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n(\alpha_n) = e^\ell}$$

-iii- Par définition de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P_n(\alpha_n) = 0$, donc à la fois $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\alpha_n) = e^{\ell}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\alpha_n) = 0$. Nous en déduisons que $e^{\ell} = 0$, ce qui est évidemment contradictoire.

-e- Puisque nous sommes parvenus à une contradiction en supposant que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est qu'elle diverge. Comme nous avons montré à la question 2) -c- ii qu'elle est décroissante, le théorème de la limite monotone entraîne que $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } -\infty}$.