MPSI/MP2I – Devoir Surveillé n° 5

Samedi 18 janvier 2025

Durée : 4 heures

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

Les calculatrices sont interdites

1 Equation fonctionnelle

On cherche à déterminer toutes les fonctions réelles f définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (\star)$$

On note E l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant ($\star$).

Partie I. Première méthode

1) **Question préliminaire.**
Donner l'expression générale des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

en fonction de n et des premiers termes u_0, u_1.

2) Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ est un élément de E. Que vaut $g(0) = 0$?

3) On pose $a = g(1)$.
   - -a- Montrer que la fonction g est impaire.
   - -b- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = g(n\alpha)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de I-1).
   En déduire l'expression de $g(n\alpha)$ en fonction de n et $g(\alpha)$.
   - -c- Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g\left(\frac{1}{2^p}\right) = \frac{a}{2^p}$.
   - -d- On note $D = \left\{ \frac{n}{2^p} \middle|\, n \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que pour tout $x \in D$, $g(x) = ax$.
   - -e- Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une suite (d_n) d'éléments de D qui tend vers x_0.
   - -f- En déduire l'expression de g puis de f.

4) Déduire de ce qui précède toutes les fonctions f éléments de E.

Partie II. Seconde méthode

On étudie ici une autre méthode : les résultats de la partie I ne devront donc pas être utilisés.
Soit $f \in E$.

1) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$.

2) Montrer que $\forall x \in [0,1], 2x \in [0,1]$ ou $2x - 1 \in [0,1]$.

3) Dans cette question, on suppose que $f(0) = f(1)$.
   - -a- Montrer que f est 1-périodique.
   - -b- Justifier l'existence de $(c,d) \in [0,1]^2$ tel que : $\forall x \in [0,1], f(d) \leqslant f(x) \leqslant f(c)$.
   - -c- -i- On suppose que $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Montrer que $f(c) = f(0)$.

-ii- On suppose que $c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que $f(c) = f(0)$.

-d- Montrer que $f(0) = f(c) = f(d)$. Que peut-on en déduire pour f ?

4) On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - (f(1) - f(0))x$.
Montrer que $h \in E$, puis que h est constante. En déduire l'expression de f.

5) En déduire toutes les fonctions f éléménts de E.

2 Exercice d'arithmétique

Définitions et notations.

— Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $S(n)$ la somme des ses diviseurs positifs (notamment 1 et n). Ainsi,

$$S(2) = 3, \quad S(3) = 4, \quad S(833) = S(7^2 \times 17) = 1 + 7 + 17 + 49 + 119 + 833 = 1026.$$

— Un entier $n \geqslant 2$ est dit *parfait* lorsqu'il vérifie l'égalité $S(n) = 2n$.

— Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$, de sorte que $S(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}(n)} d$.

L'objectif de cet exercice est la recherche de tous les nombres parfaits pairs.

1) *Préliminaire.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^n - 1$.

-a- Soient a, b des entiers naturels. Montrer que M_a divise M_{ab}.

-b- En déduire que si M_n est un nombre premier, alors n est nécessairement un nombre premier.

2) *Cas particuliers remarquables.*

-a- Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que n est premier si et seulement si $S(n) = n + 1$.

-b- Soient p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}(p^\alpha)$ et montrer que $S(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$.

3) Dans cette question, on se donne m, n deux entiers naturels *premiers entre eux.*

-a- Montrer que tout $(k, \ell) \in \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n)$ vérifie $k\ell \in \mathcal{D}(mn)$. On notera f l'application ainsi définie,

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n) & \longrightarrow & \mathcal{D}(mn) \\ (k, \ell) & \longmapsto & k\ell \end{array} \right.$$

-b- Montrer que $(k \mid m$ et $\ell \mid n)$ implique $k \wedge \ell = 1$. En déduire que l'application f est injective.

-c- Montrer que l'application f est surjective : on pourra prendre $d \in \mathcal{D}(mn)$ et poser $k = d \wedge m$.

-d- Établir finalement l'identité $S(mn) = S(m)\, S(n)$.

4) *Condition suffisante.*

-a- Soit $p \geqslant 2$ tel que $2^p - 1$ est premier. Montrer que $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait pair.

-b- Donner trois nombres parfaits pairs.

5) *Condition nécessaire.* On considère désormais $n \geqslant 2$ un nombre parfait pair.

-a- Montrer que n admet au moins un facteur premier impair. Dans la suite, on pourra donc écrire n sous la forme $n = 2^a b$ pour un certain couple (a, b) d'entiers tels que $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 3$, avec b impair.

-b- Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = \left(2^{a+1} - 1\right) c$ et $S(b) = 2^{a+1}\, c$.

-c- Démontrer, par l'absurde, que $c = 1$.

-d- En déduire que b est un nombre premier, puis que $a + 1$ est un nombre premier.

6) Montrer que tout nombre parfait impair n admet au moins trois facteurs premiers distincts.
Indication : on pourra remarquer que $\dfrac{S(p^\alpha)}{p^\alpha} < \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p}}$ pour tous p premier et $\alpha \in \mathbb{N}$.

Pour la culture. On ignore encore à ce jour s'il existe des nombres parfaits impairs.

3 Exercice sur les structures

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par D l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (x, y) de nombres réels muni de l'addition et de la multiplication suivantes :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx', xy' + x'y)\,.$$

1) Prouver que $(D, +, \cdot)$ est un anneau commutatif, possédant $(1, 0)$ comme élément neutre pour le produit. Les éléments de D seront appelés *nombres duaux*
2) On note D_1 (respectivement D_2) l'ensemble des nombres duaux de la forme $(x, 0)$ (respectivement de la forme $(0, y)$).
   - -a- Prouver que D_1 est un sous-anneau de D.
   - -b- D_2 est-il un sous-anneau de D ?
   - -c- Que vaut $(0, 1) \cdot (0, 1)$? L'anneau D est-il un corps ?
   - -d- Prouver que $f : x \longmapsto (x, 0)$ est un isomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur D_1.
3) L'isomorphisme de la question 2. -d- nous permet, dans la suite du problème, d'identifier D_1 à $\mathbb{R}$, en posant

   $$(x, 0) = x$$

   pour tout élément $(x, 0)$ de D_1.
   - -a- Prouver que tout nombre dual z peut s'écrire d'un manière unique sous la forme

     $$z = x + \varepsilon y$$

     avec $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = (0, 1)$.
   - -b- Étudier les puissances ε^p de ε pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
   - -c- Calculer z^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - -d- Rechercher les éléments inversibles de D.
4) Posons $D_+^\times = \{x + \varepsilon y,\ (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\}$.
   - -a- Montrer que $(D_+^\times, \cdot)$ est un sous-groupe du groupe des inversibles de l'anneau D.
   - -b- Montrer que l'application f définie sur D par :

     $$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + \varepsilon y) = e^x(1 + \varepsilon y)$$

     réalise un isomorphisme de groupes de $(D, +)$ vers $(D_+^\times, \cdot)$. Donner l'expression de f^{-1}.
5) Si f est une fonction réelle d'un variable réelle, dérivable sur $\mathbb{R}$, on la prolonge à D en posant, pour tout $z = x + \varepsilon y$ de D,

   $$f(z) = f(x) + \varepsilon y f'(x)$$

   - -a- Donner les expressions de $\cos(z)$ et de $\sin(z)$.
   - -b- Calculer $\cos^2(z) + \sin^2(z)$.
   - -c- Calculer $\cos(z + z')$.