MPSI/MP2I – Devoir Surveillé 5

Samedi 18 janvier

Corrigé

Equation fonctionnelle

Partie I. Première méthode

1) **Question préliminaire.**
L'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$ à une unique solution : 1.
Posons donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu.$$

Alors : $\begin{cases} u_0 = \mu \\ u_1 = \lambda + \mu \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \lambda = u_1 - u_0 \\ \mu = u_0 \end{cases}$.

Par suite : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (u_1 - u_0)n + u_0}$.

2) Soit $f \in E$. Comme f est continue $\mathbb{R}$ alors g est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) \\ &= \frac{f(x)+f(y)}{2} - f(0) \quad \text{(d'après } (\star)\text{)} \\ &= \frac{f(x) - f(0) + f(y) - f(0)}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}}.$$

Donc $\boxed{g \in E \text{ et } g(0) = 0}$.

3) On pose $a = g(1)$.

-a- Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après $(\star)$ avec $y = -x$, $\dfrac{g(x)+g(-x)}{2} = g(0)$.
Comme $g(0) = 0$, $g(-x) = -g(x)$ donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

-b- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = g(n\alpha)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $x = (n+2)\alpha$ et $y = n\alpha$ dans $(\star)$,

$$\frac{g((n+2)\alpha) + g(n\alpha)}{2} = g\left(\frac{(n+2)\alpha + n\alpha}{2}\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{u_{n+2} + u_n}{2} = u_{n+1}.$$

Donc $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie la relation de récurrence de I-1)}}$.
Or $u_0 = g(0) = 0$ et $u_1 = g(\alpha)$ donc toujours d'après I-1) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n\alpha) = u_n = ng(\alpha).$$

Soit $n \in \mathbb{Z}_-^*$, alors $-n \in \mathbb{N}$, donc $g((-n)\alpha) = (-n)g(\alpha)$ donc par par imparité de g, $g(n\alpha) = ng(\alpha)$.
Comme voulu : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n\alpha) = ng(\alpha).}$

-c- Soit $p \in \mathbb{N}$, en prenant $x = \dfrac{1}{2^p}$ et $y = 0$ dans $(\star)$,

$$\frac{g\left(\frac{1}{2^p}\right) + g(0)}{2} = g\left(\frac{\frac{1}{2^p} + 0}{2}\right) \quad \text{c'est-à-dire } \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2^p}\right) = g\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right).$$

La suite $\left(g\left(\frac{1}{2^p}\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, d'où

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad g\left(\frac{1}{2^p}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p g\left(\frac{1}{2^0}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p g(1).$$

Comme voulu, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, g\left(\frac{1}{2^p}\right) = \frac{a}{2^p}}$.

-d- Soit $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n}{2^p}\right) &= ng\left(\frac{1}{2^p}\right) \qquad \text{d'après I-3)-b- avec } \alpha = \tfrac{1}{2^p} \\ &= \frac{n}{2^p}a \qquad \text{d'après I-3)-c-.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in D,\ g(x) = ax}$.

-e- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \dfrac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n}$.
(u_n) est une suite d'éléments de D. Puis pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n x_0 - 1 < \lfloor 2^n x_0 \rfloor \leqslant 2^n x_0 \qquad \text{donc} \qquad x_0 - \frac{1}{2^n} < \frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n} \leqslant x_0.$$

Donc par théorème d'encadrement, $d_n \overset{[}{n}\to +\infty]\longrightarrow x_0$.

-f- D'après I-3)-d-, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(d_n) = ad_n$. Or $d_n \to x_0$ et g continue en x_0, on peut donc passer à la limite quand $n \to +\infty$, pour obtenir $g(x_0) = ax_0$, ce pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Donc g est linéaire.
Puis : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x_0) = ax_0 + f(0)}$.

4) Soit f une fonction affine $x \mapsto ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. f est continue sur $\mathbb{R}$, puis pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = \frac{ax + b + ay + b}{2} = a\frac{x+y}{2} + b = f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Donc f est bien élément de E.

Conclusion : $\boxed{E \text{ est l'ensemble des fonction affines}}$.

Partie II. Seconde méthode

Soit $f \in E$.

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On utilise trois fois la relation $(\star)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(2x) + f(2y)}{2} &= f(x+y) \text{ avec } 2x,\ 2y \text{ à la place de } x \text{ et } y \\ \frac{f(2x) + f(0)}{2} &= f(x) \text{ avec } 2x,\ 0 \text{ à la place de } x \text{ et } y \\ \frac{f(2y) + f(0)}{2} &= f(y) \text{ avec } 2y,\ 0 \text{ à la place de } x \text{ et } y. \end{aligned}$$

Il découle

$$f(2x) + f(2y) = 2f(x+y) \qquad f(2x) + f(0) = 2f(x) \qquad f(2y) + f(0) = 2f(y).$$

On soustrait les deuxième et troisième relation à la première pour obtenir : $\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0).}$

2) Soit $x \in [0, 1]$. Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, alors $2x \in [0, 1]$. Et si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, alors $2x - 1 \in [0, 1]$.

3) Dans cette question, on suppose que $f(0) = f(1)$.

-a- On prend $y = 1$, dans II-1), et on utilise $f(0) = f(1)$ pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$.
Donc $\boxed{f \text{ est 1-périodique}}$.

-b- f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc admet un maximum, atteint en un $c \in [0, 1]$ et un minimum atteint en un $d \in [0, 1]$.
On a donc : $\boxed{\forall x \in [0, 1],\ f(d) \leqslant f(x) \leqslant f(c)}$.

-c- -i- On suppose que $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
En prenant $x = 0$ dans II-3)-b-, on obtient $f(0) \leqslant f(c)$.
Puis on prend $x = 2c \in [0, 1]$ dans II-3)-b-, on obtient $f(2c) \leqslant f(c)$. Or en prenant $y = x = c$ dans II-1), on obtient $f(2c) = 2f(c) - f(0)$.
Donc : $2f(c) - f(0) \leqslant f(c)$ c'est-à-dire $f(c) \leqslant f(0)$.
La double inégalité donne $\boxed{f(c) = f(0)}$.

-ii- On suppose que $c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On raisonne comme ci-dessus.
En prenant $x = 0$ dans II-3)-b-, on obtient $f(0) \leqslant f(c)$.
Puis on prend $x = 2c - 1 \in [0,1]$ dans II-3)-b-, on obtient $f(2c-1) \leqslant f(c)$. Or en prenant $x = c$ et $y = c-1$ dans II-1), on obtient $f(2c-1) = f(c-1) + f(c) - f(0) = 2f(c) - f(0)$ car f est 1-périodique.
Donc : $2f(c) - f(0) \leqslant f(c)$ c'est-à-dire $f(c) \leqslant f(0)$.
La double inégalité donne $\boxed{f(c) = f(0)}$.

-d- D'après les deux questions précédente : $\boxed{\forall c \in [0,1], \quad f(c) = f(0)}$.
De même qu'en II-3)-c, on prouve $\boxed{\forall d \in [0,1], \quad f(d) = f(0)}$ en distinguant $d \in [0, \frac{1}{2}]$ et $d \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Et donc d'après II-3)b- : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(0)$, donc f est constante sur $[0,1]$ et par périodicité, $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$.

4) On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - (f(1) - f(0))x$.
Comme $f \in E$ alors f est continue, donc par opérations sur les fonctions continues, h est continue sur $\mathbb{R}$.
Puis pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, Donc $h \in E$.
Or $h(1) = f(0) = h(0)$. Donc d'après la question 3) ; avec h au lieu de f, $\boxed{h \text{ est constante}}$. Donc f est affine.

5) Comme I-4).

Exercice d'arithmétique

1) *Préliminaire.*

-a- Par identité de Bernoulli : $M_{ab} = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)\sum_{k=0}^{b-1}(2^a)^k$ d'où $\boxed{M_a \mid M_{ab}}$.

-b- Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons que n soit composé. Il existe alors a, b entiers tels que $n = ab$ et $1 < a < n$. Alors $M_a \mid M_n$ d'après -a-, et $1 < M_a < M_n$ car $1 < a < n$ donc M_n est composé. Par contraposée,

$$\boxed{\text{si } M_n \text{ est premier alors } n \text{ est premier}}$$

2) *Cas particuliers de la somme des diviseurs.*

-a- • Supposons que n est premier. Dans ce cas $\mathcal{D}(n) = \{1, n\}$ donc $S(n) = n + 1$.
• Pour la réciproque, on raisonne par contraposée. Supposons que n est composé. Alors n admet un diviseur d tel que $1 < d < n$. Donc $\{1, d, n\} \subset \mathcal{D}(n)$ et $S(n) \geqslant n + d + 1 > n + 1$.
• Donc $\boxed{n \text{ est premier si et seulement si } S(n) = n + 1}$

-b- Selon le critère sur les valuations p-adiques, les diviseurs positifs de p^α sont les entiers $d \geqslant 1$ tels que :

$$v_p(d) \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \forall q \in \mathbb{P} \setminus \{q\}, \; v_q(d) = 0.$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{D}(n) = \{p^k : 0 \leqslant k \leqslant \alpha\}}$ et par conséquent $S(n) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^k = \boxed{\dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}}$.

3) -a- Soit $(k, \ell) \in \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n)$. On sait que $k \mid m \Rightarrow k\ell \mid m\ell$ et $\ell \mid n \Rightarrow m\ell \mid mn$. Par transitivité $\boxed{k\ell \mid mn}$.

-b- • Supposons que $k \mid m$ et $\ell \mid n$. Par caratérisation $k \wedge \ell$ est un diviseur de k et ℓ. Par transitivité, c'est aussi un diviseur de m et n. Or m et n sont premiers entre eux, donc $\boxed{k \wedge \ell = 1}$.
• Soient (k_1, ℓ_1) et (k_2, ℓ_2) dans $\mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n)$ tels que $f(k_1, \ell_1) = f(k_2, \ell_2)$, c'est-à-dire $k_1\ell_1 = k_2\ell_2$. D'après le premier point $k_1 \wedge \ell_2 = 1$. Or $k_1 \mid k_2\ell_2$, donc $k_1 \mid k_2$ par théorème de Gauss. De même $k_2 \mid k_1$ en échageant les rôles de k_1 et k_2. Comme ce sont des entiers positifs, $k_1 = k_2$. De même, $\ell_1 = \ell_2$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est injective.}}$$

-c- Soit $d \in \mathcal{D}(mn)$. Montrons que d admet un antécédent par f en posant $k = d \wedge m$. Il existe alors d', m' entiers premiers entre eux tels que $d = kd'$ et $m = km'$. D'autre part $d \mid mn$ donc $kd' \mid km'n$, ce qui se simplifie en $d' \mid m'n$. Comme $d' \wedge m' = 1$, on obtient $d' \mid n$ par théorème de Gauss. Finalement $d = kd'$ avec $k \in \mathcal{D}(m)$ et $d' \in \mathcal{D}(n)$, donc le couple (k, d') est un antécédent de d par f.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est surjective.}}$$

-d- Les questions -b- et -c- montrent que f est une bijection. On peut donc réindexer la somme :

$$S(mn) = \sum_{d \in \mathcal{D}(mn)} d = \sum_{(k,\ell) \in \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n)} k\ell = \left(\sum_{k \in \mathcal{D}(m)} k\right)\left(\sum_{\ell \in \mathcal{D}(n)} \ell\right) = S(m)\,S(n).$$

Comme voulu $\boxed{S(mn) = S(m)S(n)}$

4) *Condition suffisante.*

-a- Le seul facteur premier de 2^{p-1} est 2. Or $2^p - 1$ est impair, donc 2^{p-1} et $2^p - 1$ sont premiers entre eux. D'après la question 3) -d- il vient donc $S(2^{p-1}(2^p-1)) = S(2^{p-1})S(2^p-1)$ où

$$S(2^{p-1}) = \frac{2^p - 1}{2-1} = 2^p - 1 \text{ (d'après 2) -b-)} \qquad S(2^p - 1) = 2^p \text{ (d'après 2) -a-)}$$

Finalement l'entier $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ vérifie $S(n) = (2^p - 1)2^p = 2n$ donc il est parfait. Mais aussi pair car $v_2(2^{p-1}) = p - 1 \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{L'entier } 2^{p-1}\big(2^p - 1\big) \text{ est un nombre parfait pair.}}$$

-b- Les nombres premiers $p \in \{2, 3, 5\}$ donnent $2^p - 1 \in \{3, 7, 31\}$. Ce sont bien des nombres premiers. On en déduit trois nombres parfaits pairs d'après la question 4) -a- :

$$\boxed{2 \times 3 = 6, \quad 4 \times 7 = 28, \quad 16 \times 31 = 496.}$$

5) *Condition nécessaire.*

-a- Supposons que n n'admet aucun facteur premier impair. La décomposition en facteurs premiers est alors de la forme $n = 2^a$ avec $a \geqslant 1$, d'où $S(n) = (2^{a+1} - 1)/(2-1)$ d'après la question 2) -b-. C'est un entier impair donc l'égalité $S(n) = 2n$ est impossible. Par contraposée :

$$\boxed{\text{si } n \text{ est un nombre parfait pair, il admet au moins un facteur premier impair.}}$$

-b- Le seul facteur premier de 2^a est 2, qui ne divise pas b car il est impair. Donc 2^a et b sont premiers entre eux. D'après la question 3) -d-, l'égalité $S(n) = 2n$ se traduit par $S(2^a)S(b) = 2^{a+1}b$, c'est-à-dire :

$$(2^{a+1} - 1)S(b) = 2^{a+1}b.$$

Les entiers $2^{a+1} - 1$ et 2^{a+1} sont premiers entre eux donc $2^{a+1} \mid S(b)$ par théorème de Gauss. Il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $\boxed{S(b) = 2^{a+1}\,c}$. Par substitution et simplification il en découle que $\boxed{(2^{a+1} - 1)\,c = b}$.

-c- Supposons que $c \geqslant 2$ et cherchons une contradiction. Dans ce cas c est un diviseur de b tel que $1 < c < b$, donc $S(b) \geqslant b + c + 1$. Or $S(b) - b = c$ d'après -b-, d'où l'inégalité absurde $c \geqslant c + 1$.

$$\boxed{\text{Donc } c = 1 \text{ par l'absurde.}}$$

-d- D'après les questions -b- et -c-, $S(b) = b + c = b + 1$. Donc :

$$\boxed{b \text{ est un nombre premier d'après la question 2) -a-.}}$$

D'autre part $c = 1$ se traduit par $2^{a+1} - 1 = b$, donc M_{a+1} est premier. Par conséquent :

$$\boxed{a + 1 \text{ est un nombre premier d'après le préliminaire 1) -b-.}}$$

6) L'indication est facilement vérifiée, d'après 2)-b- :

$$\frac{S(p^\alpha)}{p^\alpha} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p-1)} < \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha(p-1)} = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}.$$

Soit $n \geqslant 2$ un nombre parfait impair. Supposons que n admet au plus deux facteurs premiers $p < q$ et cherchons une contradiction. Il existe dans ce cas α, β entier naturels tels que $n = p^\alpha\, q^\beta$, d'où

$$S(n) = S(p^\alpha)S(q^\beta) \quad \text{et d'après l'indication} \quad \frac{S(n)}{n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}\frac{1}{1 - \frac{1}{q}}.$$

Comme n est parfait, il vient $2(1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{q}) < 1$. D'autre part $p \geqslant 3$ et $q \geqslant 5$ car n est impair, donc

$$2(1 - \tfrac{1}{p})(1 - \tfrac{1}{q}) \geqslant \frac{16}{15}, \qquad \text{ce qui est absurde.}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{tout nombre parfait impair admet au moins trois facteurs premiers.}}$

Exercice sur les structures

1) • Montrons que $(D,+)$ est un groupe commutatif.
   — L'addition de D est associe bien à tout couple de $\mathbb{R}^2$ un unique couple de $\mathbb{R}^2$. il s'agit bien d'une loi de composition interne.
   — Considérons (x,x',x'',y,y',y'') un sextuplet de réels, alors :

$$(x,y)+((x',y')+(x'',y''))=(x,y)+(x'+x'',y'+y'')=(x+(x'+x''),y+(y'+y''))$$

   De la même façon, nous obtenons :

$$((x,y)+(x',y'))+(x'',y'')=(x+x',y+y')+(x'',y'')=((x+x')+x'',(y+y')+y'')$$

   Comme l'addition est associative dans $\mathbb{R}$, alors

$$(x+(x'+x''),y+(y'+y''))=((x+x')+x'',(y+y')+y'')$$

   et donc l'addition est associative dans D.
   — Considérons (x,x',y,y') un quadruplet de réels, alors grâce à la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$, nous obtenons :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)=(x',y')+(x,y)$$

   L'addition dans D est commutative.
   — Remarquons que : $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)$. Comme $+$ est commutative, alors $(0,0)$ est l'élément neutre pour l'addition de D.
   — Soit (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$, alors $(-x,-y)$ appartient aussi à $\mathbb{R}^2$ et

$$(x,y)+(-x,-y)=(x-x,y-y)=(0,0).$$

   Comme $+$ est commutative, alors tout élément de D possède un opposé pour l'addition que nous avons définie.

   Finalement, $(D,+)$ est bien un groupe commutatif.

• Montrons que $\cdot$ est une loi de composition interne.
À tout couple de deux réels, la multiplication $\cdot$ associe un unique couple de deux réels. il s'agit donc bien d'une loi de composition interne.

• Montrons que $\cdot$ est commutative.
Considérons pour cela (x,x',y,y') un quadruplet de réels, alors grâce à la commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, nous obtenons :

$$(x,y)\cdot(x',y')=(xx',xy'+x'y)=(x'x,x'y+xy')=(x',y')\cdot(x,y)$$

La multiplication dans D est commutative.

• Montrons que $\cdot$ est associative.
Considérons pour cela (x,x',x'',y,y',y'') un sextuplet de réels, alors :

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot((x',y')\cdot(x'',y'')) &= (x,y)\cdot(x'x'',x'y''+x''y')\\ &= (x(x'x''),x(x'y''+x''y')+x'x''y))\\ &= (xx'x'',xx'y''+xx''y'+x'x''y))\ \ (\text{car } (\mathbb{R},+,\times) \text{ est un anneau})\end{aligned}$$

Par commutativité du produit $\cdot$, $((x,y)\cdot(x',y'))\cdot(x'',y'')=(x'',y'')\cdot((x,y)\cdot(x',y'))$, et on peut appliquer le calcul précédent en employant la permutation qui remplace x et y par x'' et y'', x' et y' par x et y, et enfin x'' et y'' par x' et y' :

$$(x'',y'')\cdot((x,y)\cdot(x',y'))=(x''xx',x''xy'+x''x'y+xx'y''))$$

Comme l'addition et la multiplication sont commutatives dans $\mathbb{R}$, alors

$$(x,y)\cdot((x',y')\cdot(x'',y''))=((x,y)\cdot(x',y'))\cdot(x'',y''),$$

et la multiplication est bien associative dans D.

- Montrons que $(1,0)$ est un neutre pour $\cdot$.
  Soit (x,y) appartenant à D, alors $(x,y)\cdot(1,0) = (x\times 1, x\times 0 + 1\times y) = (x,y)$. Comme $\cdot$ est commutative, alors $(1,0)$ est un neutre pour $\cdot$.
- Montrons que $\cdot$ est distributive sur $+$.
  Considérons pour cela (x,x',x'',y,y',y'') un sextuplet de réels, alors :

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot((x',y')+(x'',y'')) &= (x,y)\cdot(x'+x'',y'+y'')\\ &= (x(x'+x''), x(y'+y'')+(x'+x'')y))\\ &= (xx'+xx'', xy'+xy''+x'y+x''y) \quad (\text{car } (\mathbb{R},+,\times) \text{ est un anneau})\end{aligned}$$

  De même,

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot(x',y')+(x,y)\cdot(x'',y'') &= (xx',xy'+x'y)+(xx'',xy''+x''y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+x'y+xy''+x''y)\end{aligned}$$

  Comme l'addition est commutatives dans $\mathbb{R}$, alors

$$(x,y)\cdot((x',y')+(x'',y'')) = (x,y)\cdot(x',y')+(x,y)\cdot(x'',y''),$$

  et la multiplication est bien distributive sur l'addition dans D.

Ainsi $\boxed{(D,+,\cdot) \text{ est un anneau commutatif, possédant comme unité l'élément } (1,0)}$.

2) -a- Montrons que D_1 est un sous-anneau de D via la caractérisation :
- — Par définition, $D_1 \subset D$;
  — comme $(0,0)\in D_1$, alors $D_1 \neq \emptyset$;
  — Soient $(x,0$ et $(x',0)$ deux éléments de D_1, alors $(x,0)-(x',0) = (x-x',0)$, et donc $(x,0)-(x',0) \in D_1$.
  Ainsi $(D_1,+)$ est un sous-groupe de $(D,+)$.
- Soient $(x,0$ et $(x',0)$ deux éléments de D_1, alors $(x,0)\cdot(x',0) = (xx', x\times 0 + x'\times 0) = (xx',0)$, et donc $(x,0)\cdot(x',0)\in D$.
- Enfin, $(1,0)\in D_1$.

Finalement, $\boxed{D_1 \text{ est un sous-anneau de } D}$.

-b- Remarquons que l'unité de D n'appartient pas à (D_2). Nous en concluons que $\boxed{\text{l'ensemble } (D_2)}$ $\boxed{\text{n'est pas un sous-an}}$

-c- Remarquons que D n'est pas un anneau intègre, en effet :

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\times 0, 0\times 1 + 0\times 1) = (0,0).$$

Puisque D n'est pas intègre, alors $\boxed{D \text{ n'est pas un corps}}$.

-d- — Soit z appartenant à D, alors il existe un réel x tel que $z=(x,0)$, autrement dit il existe x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $z=f(x)$ et f est surjective.
— Soit x et x' deux réels tels que $f(x)=f(x')$. Alors $(x,0)=(x',0)$, et donc $x=x'$. Autrement dit f est injective.
— Soit x et x' deux réels, alors :$f(xx') = (xx',0) = (xx', x\times 0 + x'\times 0) = (x,0)\cdot(x',0) = f(x)\cdot f(x')$.

Ainsi $\boxed{f : x \longmapsto (x,0) \text{ est un isomorphisme de l'anneau } \mathbb{R} \text{ sur } (D_1)}$.

3) -a- Soit z un nombre dual. Par définition, il existe un couple (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$ tel que $z=(x,y)$. D'où :

$$z = (x,y) = (x,0)+(0,y) = (x,0)+y(0,1) = x+y\varepsilon.$$

Supposons qu'il existe aussi (x',y') appartenant à $\mathbb{R}^2$ tel que $z = x'+\varepsilon y'$. Alors :

$$\begin{aligned} x+\varepsilon y = x'+\varepsilon y' &\iff (x,y)=(x',y')\\ &\iff x=x' \text{ et } y=y'\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall\, z\in D,\ \exists!\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \ /\ z = x+\varepsilon y}$. avec $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon=(0,1)$.

-b- On a $\varepsilon^1=\varepsilon$ et $\varepsilon^2=0$ d'après la question 2 -c-. À partir de là :

$$\forall\, n\in [\![2,+\infty[\![,\ \varepsilon^n = \varepsilon^{n-2}\times\varepsilon^2 = \varepsilon^{n-2}\times 0 = 0,$$

puisque 0 est absorbant.

Ainsi $\boxed{\varepsilon^1=\varepsilon \text{ et } \forall\, n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \varepsilon^n=0}$.

-c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque D est un anneau commutatif, nous pouvons employer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} z^n &= (x+\varepsilon y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\varepsilon y)^k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k y^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \varepsilon^k y^k x^{n-k} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= x^n + n\varepsilon y x^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ z^n = x^n + n\varepsilon y x^{n-1}}$.

-d- Soit z un élément inversible de D. Il existe alors z' appartenant aussi à D tel que $zz' = 1$. Posons (x, x', y, y') appartenant à $\mathbb{R}^4$ tel que : $z = x + \varepsilon y$ et $z' = x' + \varepsilon y'$. Alors :

$$\begin{aligned} zz' = 1 &\iff (x+\varepsilon y)\cdot(x'+\varepsilon y') = 1 \\ &\iff xx' + \varepsilon(xy' + x'y) = 1 \\ &\iff xx' = 1 \text{ et } xy' + x'y = 0 \quad \text{(d'après la question 3 -a-)} \\ &\iff x \neq 0,\ x' = x^{-1} \text{ et } y' = -\frac{y}{x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des éléments inversibles de D est $\boxed{D^\times = \{x + \varepsilon y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}}$.

4) Posons $D_+^\times = \{x + \varepsilon y,\ (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\}$.

-a- Employons la caractérisation des sous-groupes.
— Par définition, $D_+^\times \subset D^\times$.
— Puisque $1 = 1 + \varepsilon 0$ et $1 > 0$, alors $1 \in D_+^\times$ et $D_+^\times \neq \emptyset$.
— Soit (z, z') appartenant à $(D_+^\times)^2$. Il existe (x, x', y, y') appartenant à $\mathbb{R}_+^* \times R^2$ tel que : $z = x + \varepsilon y$ et $z' = x' + \varepsilon y'$. Alors :

$$\begin{aligned} z \times z'^{-1} &= (x+\varepsilon y)\cdot\left(x' - \varepsilon \frac{y'}{x'^2}\right) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \underbrace{xx'}_{>0} + \varepsilon\left(-\frac{xy'}{x'^2} + x'y\right) \quad (\text{car } x > 0 \text{ et } x' > 0) \end{aligned}$$

D'où $z \times z'^{-1} \in D_+^\times$.

Ainsi $\boxed{(D_+^\times, \cdot) \text{ est un sous-groupe du groupe des inversibles de l'anneau } D}$.

-b- Montrons que f réalise un isomorphisme de groupes de $(D, +)$ vers $(D_+^\times, \cdot)$.
— Soit $z = x + \varepsilon y$ appartenant à D. Alors $e^x > 0$, et donc $e^x + \varepsilon e^x y \in D_+^\times$, autrement dit $f(x+\varepsilon y) \in D_+^\times$. Ainsi $f(D) \subset D_+^\times$.
— Soit (z, z') appartenant à D^2. Il existe (x, x', y, y') appartenant à $\mathbb{R}^4$ tel que : $z = x+\varepsilon y$ et $z' = x'+\varepsilon y'$. Alors :

$$\begin{aligned} f(z+z') &= f((x+x') + \varepsilon(y+y')) \\ &= e^{x+x'}(1 + \varepsilon(y+y')) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f(z)f(z') &= (e^x(1+\varepsilon y))\cdot(e^{x'}(1+\varepsilon y')) \\ &= e^{x+x'}(1+\varepsilon y)\cdot(1+\varepsilon y') \\ &= e^{x+x'}(1\times 1 + \varepsilon(1\times y + 1 \times y')) \\ &= e^{x+x'}(1 + \varepsilon(y+y')) \end{aligned}$$

D'où $f(z+z') = f(z)f(z')$, autrement dit f est un morphisme de groupes de $(D, +)$ vers $(D_+^\times, \cdot)$.

— Soit $z = x + \varepsilon y$ appartenant à $D_+^\times$. Étudions l'existence et l'unicité d'un nombre dual $t = x' + \varepsilon y'$ tel que $f(t) = z$

$$\begin{aligned}
f(t) = z &\iff f(x' + \varepsilon y') = x + \varepsilon y \\
&\iff e^{x'}(1 + \varepsilon y') = x + \varepsilon y \\
&\iff (e^{x'}, e^{x'}y') = (x, y) \\
&\iff e^{x'} = x \text{ et } e^{x'}y' = y \\
&\iff x' = \ln(x) \text{ et } y' = \frac{y}{x} \\
&\iff t = \ln(x) + \varepsilon\frac{y}{x}
\end{aligned}$$

Ainsi f réalise une bijection de D vers $D_+^\times$ et $\boxed{\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ f^{-1}(x + \varepsilon y) = \ln(x) + \varepsilon\frac{y}{x}}$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ réalise un isomorphisme de groupes de } (D, +) \text{ vers } (D_+^\times, \cdot)}$.

5) -a- Soit z un élément de D s'écrivant $z = x + \varepsilon y$, alors :

$$\cos(z) = \cos(x) + \varepsilon y(-\sin(x)) = \boxed{\cos(x) - \varepsilon y \sin(x)}$$

De même,

$$\sin(z) = \sin(x) + \varepsilon y(\cos(x)) = \boxed{\sin(x) + \varepsilon y \cos(x)}$$

-b- Calculons $\cos^2(z) + \sin^2(z)$:

$$\begin{aligned}
\cos^2(z) + \sin^2(z) &= (\cos(x) - \varepsilon y \sin(x))^2 + (\sin(x) + \varepsilon y \cos(x))^2 \\
&= \cos^2(x) - 2\varepsilon y \sin(x)\cos(x) + \sin^2(x) + 2\varepsilon y \cos(x)\sin(x) \\
&= \cos^2(x) + \sin^2(x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall\ z \in D,\ \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1}$.

-c- Soit (z, z') appartenant à D^2. Il existe (x, x', y, y') appartenant à $\mathbb{R}^4$ tel que : $z = x + \varepsilon y$ et $z' = x' + \varepsilon y'$. Calculons $\cos(z + z')$:

$$\begin{aligned}
\cos(z + z') &= \cos((x + x') + \varepsilon(y + y')) \\
&= \cos(x + x') + \varepsilon(y + y')(-\sin(x + x')) \\
&= \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x) - \varepsilon(y + y')(\sin(x)\cos(x') + \sin(x')\cos(x)) \\
&= \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x) - \varepsilon y \sin(x)\cos(x') - \varepsilon y \sin(x')\cos(x) \\
&\quad -\varepsilon y' \sin(x)\cos(x') - \varepsilon y' \sin(x')\cos(x)
\end{aligned}$$

Tandis qu'en n'oubliant pas que $\varepsilon^2 = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z') &= (\cos(x) - \varepsilon y \sin(x))(\cos(x') - \varepsilon y' \sin(x')) \\
&\quad -(\sin(x) + \varepsilon y \cos(x))(\sin(x') + \varepsilon y' \cos(x')) \\
&= \cos(x)\cos(x') - \varepsilon \cos(x) y' \sin(x') - \varepsilon \cos(x') y \sin(x) \\
&\quad +\varepsilon^2 y y' \sin(x)\sin(x) - \sin(x)\sin(x') + \varepsilon y \cos(x)\sin(x') \\
&\quad +\varepsilon y' \cos(x')\sin(x) + \varepsilon^2 y y' \cos(x)\cos(x') \\
&= \cos(x)\cos(x') - \varepsilon \cos(x) y' \sin(x') - \varepsilon \cos(x') y \sin(x) - \sin(x)\sin(x') \\
&\quad -\varepsilon y \cos(x)\sin(x') - \varepsilon y' \cos(x')\sin(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall\ (z, z') \in D^2,\ \cos(z + z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')}$.