Exemples d'applications linéaires

Exercice 1. (♡) Montrer que les applications suivantes sont linéaires. En déterminer l'image et le noyau. Puis déterminer si ces ces applications sont injectives, surjectives, bijectives.

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-2y, 3y) \end{array}$

2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, x-y, 3x+y) \end{array}$

3) $f: \begin{array}{ccc} \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, u \text{ converge }\} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$

4) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(6) \end{array}$

5) $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \varphi' - 2\varphi \end{array}$

6) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathrm{Re}(z) \end{array}$, $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-e.v.

7) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_6[X] & \to & \mathbb{R}_6[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

8) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & \widetilde{P}(2) \end{array}$

9) $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2. ($*$) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit les applications φ et ψ par

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = f' \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
2) Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3) Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de u et v.

Exercice 3. ($*$) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit l'application f par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(X+1) - P(X).$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$.
3) -a- Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ dans le cas $n = 3$.
   -b- Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ dans le cas général.

Exercice 4. ($**$) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction définie sur E par:

$$\forall f \in E,\ u(f) = F \quad \text{où } \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = xf(x).$$

1) Montrer que u est un endomorphisme de E.
2) Montrer que u est injective.
3) Montrer que $\mathrm{Im}\, u = \{f \in E \,/\, f(0) = 0 \text{ et } f \text{ dérivable en } 0\}$.

Exercice 5. (♡) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Psi: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f'' - 4f' + 4f \end{array}$

1) Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.
2) Déterminer le noyau de Ψ en donner une base.

Exercice 6. ($*$) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\begin{array}{rccc} \Phi_k : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f^{(k)}(0) \end{array}$.

1) Montrer que Φ_k est linéaire.

2) Montrer que $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercices théoriques

Exercice 7. ($\heartsuit$) Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Exercice 8. ($\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

2) On suppose ici que $f \circ g = \operatorname{Id}_E$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

Exercice 9. ($*$) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$ (i.e. f et g commutent).
Montrer que le noyau et l'image de f sont stables par g.

Exercice 10. ($*$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

1) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$

2) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

Exercice 11. ($*$) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\operatorname{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Montrer que f est bijective en exhibant sa réciproque.

2) Montrer que $(f - \operatorname{Id}_E) \circ (f - 2\operatorname{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. En déduire une inclusion entre $\operatorname{Im}(f - 2\operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$.

3) Prouver de même une inclusion entre $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E)$.

4) Montrer que $E = \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E) + \operatorname{Im}(f - 2\operatorname{Id}_E)$. Puis que $E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) + \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E)$.

5) Déduire de ce qui précède que $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 12. ($*$) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 + 2\operatorname{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Montrer que $f \in \operatorname{GL}(E)$ et exprimer sa réciproque à l'aide de f et de ses itérées.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda^3 + \lambda^2 + 2 \neq 0$ alors $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est inversible.

Exercice 13. ($**$) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \operatorname{Id}_E$. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - j\operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - j^2\operatorname{Id}_E).$$

Exercice 14. ($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires.

1) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ avec x et y non nuls, on a $\lambda_x = \lambda_y$.

3) Montrer alors que f est une homothétie vectorielle.

Projecteurs et symétries

Exercice 15. (♡) Montrer que l'application $p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (4x-6y, 2x-3y) \end{array}$ est un projecteur. En déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 16. (♡)

1) Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $E_1 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1,-1)$ et $\varepsilon_2 = (2,1)$. Déterminer l'expression de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
2) Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $E_1 = \mathbb{R}_1[X]$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}(2) = 0\}$. Déterminer l'expression de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 17. (♡) Montrer que l'application $s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-3x+2y, -4x+3y) \end{array}$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 18. ($*$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1) Montrer que $p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$.
2) Montrer que $p \circ q = q \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$.
3) Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_E$.

Exercice 19. ($*$) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, p un projecteur et f un endomorphisme de E. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont stables par f.

Exercice 20. ($*$)Suite de l'exercice 11
Rappel : E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et des projecteurs p et q tels que $\begin{cases} p = \lambda(f - \mathrm{Id}_E) \\ q = \mu(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \\ f = 2p + q \end{cases}$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer f^k en fonction de p, q.

Exercice 21. ($**$) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et $q = \mathrm{Id}_E - p$ le projecteur associé à p. On pose

$$G = \{g \in \mathcal{L}(E) \;/\; \exists u \in \mathcal{L}(E),\ g = u \circ p\} \qquad H = \{h \in \mathcal{L}(E) \;/\; \exists v \in \mathcal{L}(E),\ h = v \circ q\}.$$

Montrer que $G \oplus H = \mathcal{L}(E)$.

Formes linéaires

Exercice 22. (♡) On pose $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et déterminer un supplémentaire de H.

Exercice 23. ($*$) On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et l'application $\varphi: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$. Montrer que φ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \mathrm{Ker}\, \varphi$.