

## Base et dimension

**Exercice 1.** (♡) Montrer que les familles suivantes sont des bases de  $\mathbb{R}^n$ .

- 1) Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $(u_1, u_2)$  où  $u_1 = (2, 5)$  et  $u_2 = (3, 7)$
- 2) Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $(u_1, u_2, u_3)$  où  $u_1 = (1, 2, -1)$ ,  
 $u_2 = (2, 0, -3)$  et  $u_3 = (-4, 1, 1)$ .
- 3) Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $u_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$  et  
 $u_n = (1, 1, \dots, 1)$ .

**Exercice 2.** (♡) On pose  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (1, 2, 3)$  et  $w = (a, a^2, a^3)$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

- 1) Déterminer en fonction de  $a$  le rang de la famille  $(u, v, w)$ .
- 2) Pour quelles valeurs de  $a$  cette famille est-elle une base de  $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 3.** (♡) Calculer le rang de ces familles de vecteurs. Sont-elles des bases de  $\mathbb{R}_2[X]$ ?

- 1)  $P_1 = X^2 + 3X - 4$ ,  $P_2 = 2X^2 - 5X + 7$
- 2)  $P_1 = 2X^2 + 5X - 1$ ,  $P_2 = -5X + 7$ ,  $P_3 = 7$
- 3)  $P_1 = 3X^2 - 3X$ ,  $P_2 = X + 4$ ,  $P_3 = -X^2 - 5X + 1$ ,  
 $P_4 = 2X^2 - X + 1$

**Exercice 4.** (\*) Soient  $n + 1$  réels  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $n + 1$  deux à deux distincts et pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , les polynômes

$$P_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(X - x_j)}{x_i - x_j}.$$

- 1) Montrer que que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 2) Exprimer les coordonnées d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  dans cette base.

**Exercice 5.** (♡) Soit  $F$  l'ensemble des applications de la forme  $x \mapsto P(x) \cos x + Q(x) \sin x$  où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions polynomiales de degré au plus 2. Montrer que  $F$  est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

**Exercice 6.** (♡) Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants

- 1)  $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$
- 2)  $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0, y + z = 0, z + t = 0, t + x = 0\}$
- 3)  $E_3 = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n\}$
- 4)  $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ deux fois dérivable } f'' - 3f' + 2f = 0\}$
- 5)  $E_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(1) = 0\}$
- 6)  $E_6 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / DM = MD\}$  où  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**Exercice 7** On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  sont des sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Déterminer leur dimension.
- 2) Montrer alors qu'ils sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 8.** (\*) Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Déterminer, si les familles suivantes forment une base de  $E$ :

- 1)  $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_{n-1}, e_1 + e_n)$
- 2)  $\mathcal{F}_2 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n)$
- 3)  $\mathcal{F}_3 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$ .

## Somme de sous-espaces vectoriels

**Exercice 9.** (♥) On considère les vecteurs  $a = (1, 2, 1, 0)$ ,  $b = (2, 1, 3, -1)$ ,  $c = (-1, 4, -3, 2)$  et le sous espace  $F = \text{Vect}(a, b, c)$ .

- 1) Déterminer la dimension et une base de  $F$ .
- 2) On pose  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y + z + t = 0 \text{ et } x + z - t = 0\}$ . Déterminer une base de  $G$  ainsi que sa dimension.
- 3) Montrer que  $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ .

**Exercice 10.** (♥) Soit  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + z + t = 0\}$ . Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 11.** (♥) Soit  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + z + t = 0 \text{ et } x - 3z - t = 0\}$

- 1) Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}^4$  dont on donnera une base et la dimension.
- 2) Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 12.** (♥) Dans  $\mathbb{R}_3[X]$  on pose  $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(1) = 0\}$ .  
Montrer que  $G = \text{Vect}(X + 1, X^2 + 1)$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**Exercice 13.** (\*) Dans  $\mathbb{R}_3[X]$  on pose les trois sev suivants

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(X) = P(-X)\}$$

- 1) Déterminer les dimensions de  $F$ ,  $G$ ,  $H$ .
- 2) Montrer que  $F \oplus G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P(2) = 0\}$ .
- 3) Montrer que  $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[X]$ .

**Exercice 14.** (♥) Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension 5 tels que  $\dim F = \dim G = 3$ . Montrer que  $F \cap G \neq \{0\}$ .

**Exercice 15.** (♥)- Formule de Grassmann : démonstration constructive Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$  de dimension finie non nulle.

On veut démontrer :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

- 1) On pose  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F \cap G$ . Justifier qu'il existe des familles de vecteurs  $(f_1, \dots, f_q)$  de  $F$  et  $(g_1, \dots, g_r)$  de  $G$  tels que  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $F$  et  $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$  est une base de  $G$ .
- 2) Montrer que la famille  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$  est une base de  $F + G$ .
- 3) Conclure.

## Applications linéaires en dimension finie

**Exercice 16.** (♡) Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer une base de leur image et de leur noyau.

$$1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, -x - y + 3z, x + 3y + z^3) \quad f: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad P \mapsto (\tilde{P}(0), \tilde{P}'(0), \tilde{P}(1))$$

$$2) f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto z + i\bar{z}, \text{ où } \mathbb{C} \text{ est vu comme } \mathbb{R}\text{-ev.} \quad 4) f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad M \mapsto AM \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 17.** (♡) Soit l'application  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x, y + z, y + z)$ .

- 1) Déterminer une base de  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$ .
- 2) Montrer que  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 18.** (\*) Polynômes de Lagrange

- 1) Soient  $x_0, \dots, x_n, n + 1$  réels deux à deux distincts et l'application  $\Phi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$ .
  - a- Montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme.
  - b- En déduire que si  $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$ .  
Ce polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.
- 2) Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ .  
Adapter la méthode précédente pour montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que

$$P(a) = \alpha \quad P(b) = \beta \quad P'(a) = \gamma \quad P'(b) = \delta.$$

**Exercice 19.** (♡)-(\*) Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . On note  $E = \mathbb{R}[X]$  et on définit l'application  $f$  par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(X + 1) - P(X).$$

- 1) Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
- 2) Déterminer le noyau de  $f$ .
- 3) On pose  $f_n$  la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer l'image de  $f_n$ .
- 4) Montrer que  $f$  est surjectif.

**Exercice 20.** (\*\*) On pose  $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \quad P \mapsto P + P' + P''$ .

Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

## Exercices théoriques

**Exercice 21.** (♡) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 = f$ . Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

**Exercice 22.** (\*) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  tel que  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ .

- 1) Montrer que  $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ . En déduire que  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .

2) Dédurre de ce qui précède que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 23.** ( $\heartsuit$ ) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$  tels que  $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1) Montrer que  $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$ .

2) Peut-on avoir égalité?

**Exercice 24.** ( $\heartsuit$ ) Soient  $E$  un ev de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $\text{rg}(f)$ ?

**Exercice 25.** (\*) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et  $u$  un endomorphisme nilpotent, i.e. il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Soit  $q$  le plus petit entier vérifiant la relation précédente (on l'appelle indice de nilpotence de  $u$ ).

1) Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $u^{q-1}(x) \neq 0_E$  et que la famille  $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{q-1}(x))$  est libre.

2) Comparer  $q$  et  $n$ .

3) Dédurre finalement que  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Exercice 26.** (\*\*) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1) Montrer que:  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f \Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer que dans ce cas  $2 \text{rg}(f) \leq n$ .

2) Montrer que:  $\text{Ker } f = \text{Im } f \Leftrightarrow (f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } n = 2 \text{rg}(f))$ .

**Exercice 27.** (\*) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On souhaite prouver que

$$\dim \text{Ker } f^2 \leq 2 \dim \text{Ker } f.$$

1) Montrer que  $\text{Ker } f$  est un sev de  $\text{Ker } f^2$  et qu'il existe  $F$  un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $\text{Ker } f^2$ .

2) Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$ . Montrer que  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est une famille libre de  $\text{Ker } f$ .

3) En déduire la l'inégalité voulue.

**Exercice 28.** (\*\*) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$  tels que

$$E = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker } f + \text{Ker } g.$$

Montrer que  $\text{Im } f$  et  $\text{Im } g$  sont supplémentaires dans  $E$ , ainsi que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Ker } v$ .

**Exercice 29.** (\*\*) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ .

Montrer que  $\dim E = \dim F + \dim G$  si et seulement s'il existe  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Ker } f = F$  et  $\text{Im } f = G$ .

**Exercice 30.** (\*) Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Montrer que  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$ .

**Exercice 31.** (\*) Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ .

1) Montrer que  $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .

2) On suppose que  $E = F$ ,  $f \circ g = 0$  et  $f + g \in \text{GL}(E)$ . Montrer que  $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E$ .