

Exercice 4. (**) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction définie sur E par:

$$\forall f \in E, u(f) = F \quad \text{où } \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = xf(x).$$

- 1) Montrer que u est un endomorphisme de E .
- 2) Montrer que u est injective.
- 3) Montrer que $\text{Im } u = \{F \in E / F(0) = 0 \text{ et } F \text{ dérivable en } 0\}$.

Correction -

- 1) Pour tout $f \in E$, alors $x \mapsto xf(x)$ est continue donc est éléments de E , donc $u : E \rightarrow E$.
Soit $(f, g) \in E^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(\lambda f + g)(x) = x(\lambda f + g)(x) = x\lambda f(x) + xg(x) = \lambda u(f)(x) + u(g)(x).$$

L'égalité étant vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, il découle $u(\lambda f + g) = \lambda u(f) + u(g)$. Donc u est un endomorphisme de E .

- 2) Soit $f \in E$,

$$\begin{aligned} u(f) = 0_{\mathbb{R}\mathbb{R}} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad xf(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad x = 0 \text{ ou } f(x) = 0 \text{ (si } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \text{ car } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f = 0_{\mathbb{R}\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } u = \{0_{\mathbb{R}\mathbb{R}}\}$, donc f est injective

- 3) On raisonne par double-inclusion.

Soit $F \in \text{Im } u$, posons alors $f \in E$ (continue donc) tel que $F = u(f)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = xf(x)$. Donc $F(0) = 0$, puis pour $x \neq 0, \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ donc F est dérivable en 0.

Soit F dérivable en 0 tel que $F(0) = 0$. Posons pour $x \neq 0, f(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ F'(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Alors f est continue en 0 et pour tout

$x \in \mathbb{R}, F(x) = xf(x)$ donc $F = u(f) \in \text{Im } u$.

Donc $\text{Im } u = \{F \in E / F(0) = 0 \text{ et } F \text{ dérivable en } 0\}$.

Exercice 5. (\heartsuit) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Psi : E \rightarrow E$
 $f \mapsto f'' - 4f' + 4f$

- 1) Montrer que Ψ est un endomorphisme de E .
- 2) Déterminer le noyau de Ψ en donner une base.

Correction - Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Psi : E \rightarrow E$
 $f \mapsto f'' - 4f' + 4f$

- 1) *Laissé au lecteur.*

- 2) On résout l'équation différentielle $f'' - 4f' + 4f = 0$, on prouve alors que $\text{Ker } \Psi = \text{Vect}(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x e^{2x})$. Les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto x e^{2x}$ ne sont pas proportionnelles, donc la famille $(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x e^{2x})$ est libre. Donc $(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x e^{2x})$ est une base de $\text{Ker } \Psi$.

Exercice 6. (*) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\Phi_k : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto f^{(k)}(0)$.

- 1) Montrer que Φ_k est linéaire.
- 2) Montrer que (Φ_0, \dots, Φ_n) est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Correction - Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\Phi_k : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto f^{(k)}(0)$.

- 1) *Laissé au lecteur.*

2) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k \Phi_k = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$, c'est-à-dire

$$\forall f \in E, \sum_{k=0}^n \lambda_k f^{(k)}(0) = 0.$$

On choisit en particulier $f : x \mapsto x^j$, successivement pour $j = 0, \dots, j = n$, on obtient donc de proche en proche

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Donc la famille (Φ_0, \dots, Φ_n) est libre.

Exercice 10. (*) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

- 1) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \Leftrightarrow \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$
- 2) $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \Leftrightarrow E = \text{Ker } f + \text{Im } f$.

Correction -

- 1) • \Rightarrow): supposons $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. Montrons $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$. On procède par double inclusion.

On a clairement $\{0_E\} \subset \text{Ker } f \cap \text{Im } f$, car $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc contiennent 0_E .

Inversement, soit $u \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. Alors $u \in \text{Ker } f$ donc $f(u) = 0_E$ et $u \in \text{Im } f$ donc posons $v \in E$ tel que $u = f(v)$.

Comme $u \in \text{Ker } f$, $0_E = f(u) = f^2(v)$ donc $v \in \text{Ker } f^2$. Or $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ donc $v \in \text{Ker } f$ donc $u = f(v) = 0_E$. D'où la deuxième inclusion $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \subset \{0_E\}$.

D'où l'égalité voulue $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$ et la première implication.

- \Leftarrow): Supposons $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$. Montrons $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. On procède par double inclusion.

Soit $v \in \text{Ker } f$, alors $f(v) = 0_E$. Par transport du neutre $f^2(v) = f(f(v)) = 0_E$. Donc $v \in \text{Ker } f^2$. D'où la première inclusion $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.

Inversement, soit $u \in \text{Ker } f^2$, $f^2(u) = 0_E$. Donc $f(u)$ est à la fois un élément de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$. Or $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$, donc $f(u) = 0_E$ donc $u \in \text{Ker } f$. D'où la deuxième inclusion. Et donc l'égalité voulue $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

On a donc bien $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \Leftrightarrow \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$.

- 2) • \Rightarrow): supposons $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. Montrons $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$.

On a clairement $\text{Ker } f + \text{Im } f \subset E$, car $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

Inversement, soit $u \in E$. Alors $f(u) \in \text{Im } f$. Or par hypothèse $\text{Im } f = \text{Im } f^2$, donc on peut poser $a \in E$ tel que $f(u) = f^2(a)$. Écrivons alors

$$u = f(a) + (u - f(a)).$$

Alors $f(a) \in \text{Im } f$ et $u - f(a) \in \text{Ker } f$ car $f(u - f(a)) = f(u) - f^2(a) = 0_E$. Finalement $u \in \text{Im } f + \text{Ker } f$. D'où la deuxième inclusion $E \subset \text{Ker } f + \text{Im } f$.

D'où l'égalité voulue $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$.

- \Leftarrow): réciproquement, supposons $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$. Montrons $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.

Soit $v \in \text{Im } f^2$, alors posons $u \in E$ tel que $v = f^2(u)$. En particulier, $v = f(f(u))$ qui appartient alors à $\text{Im } f$. D'où la première inclusion $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.

Inversement, soit $v \in \text{Im } f$, alors posons $u \in E$ tel que $v = f(u)$.

Comme $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$ alors posons $a \in \text{Ker } f$ et $b \in \text{Im } f$ tel que $u = a + b$. Comme $b \in \text{Im } f$, posons $c \in E$ tel que $b = f(c)$, ainsi $u = a + f(c)$.

Donc

$$v = f(u) = \underbrace{f(a)}_{=0_E} + f^2(c) = f^2(c) \in \text{Im } f^2.$$

D'où l'autre inclusion $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$. D'où l'égalité voulue $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.

On a donc bien $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \Leftrightarrow E = \text{Ker } f + \text{Im } f$.

Exercice 11 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$.

- 1) Montrer que f est bijective en exhibant sa réciproque.
- 2) Montrer que $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) = 0$. En déduire que $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
- 3) Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.
- 4) Montrer que $E = \text{Im}(f - \text{Id}_E) + \text{Im}(f - 2\text{Id}_E)$.
- 5) Déduire de ce qui précède que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

Puis exercice 20.

- 6) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et des projecteurs p et q tels que
$$\begin{cases} p = \lambda(f - \text{Id}_E) \\ q = \mu(f - 2\text{Id}_E) \\ f = 2p + q \end{cases} .$$
- 7) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer f^k en fonction de p, q .

Correction - Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$.

- 1) De $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$, on déduit $\frac{1}{2}(3f - f^2) = \text{Id}_E$ i.e. $\frac{1}{2}(3\text{Id}_E - f) \circ f = f \circ (\frac{1}{2}(3\text{Id}_E - f))$.

Donc, d'après un théorème de caractérisation des bijections, f est bijective avec $f^{-1} = \frac{1}{2}(3\text{Id}_E - f)$

- 2) On a :

$$\begin{aligned} (f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) &= f \circ (f - 2\text{Id}_E) - \text{Id}_E \circ (f - 2\text{Id}_E) \quad (\text{distributivité de } \circ \text{ par rapport à } +) \\ &= f^2 - 2f - f + 2\text{Id}_E = f^2 - 3f + 2\text{Id}_E \end{aligned}$$

$$(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) = O_{\mathcal{L}(E)} \quad (\text{par hypothèse})$$

Soit $v \in \text{Im}(f - 2\text{Id}_E)$, il existe alors $u \in E$ tel que $v = (f - 2\text{Id}_E)(u)$.

Donc $(f - \text{Id}_E)(v) = (f - \text{Id}_E)((f - 2\text{Id}_E)(u)) = ((f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E))(u) = O_E$ car $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $v \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

Finalement, $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

- 3) De manière similaire on prouve $(f - 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$, on déduit $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.

- 4) • Comme $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $\text{Im}(f - \text{Id}_E) + \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset E$.
• Inversement, soit $u \in E$, alors

$$u = (f(u) - u) - (f(u) - 2u) = (f - \text{Id}_E)(u) + (f - 2\text{Id}_E)(-u) \in \text{Im}(f - \text{Id}_E) + \text{Im}(f - 2\text{Id}_E)$$

D'où la deuxième inclusion.

• Finalement, $E = \text{Im}(f - \text{Id}_E) + \text{Im}(f - 2\text{Id}_E)$.

- 5) • On montre tout d'abord $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.
Tout d'abord $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \subset E$, car $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
Soit $u \in E$, d'après 4), il existe $a \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ et $b \in \text{Im}(f - 2\text{Id}_E)$ tel que $u = a + b$. Or d'après 2) et 3), $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, donc $a \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et $b \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. Finalement $u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$. D'où la deuxième inclusion.

- On montre ensuite $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = \{0_E\}$.
Tout d'abord $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ car $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
Inversement, soit $u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$. Alors

$$(f - \text{Id}_E)(u) = 0_E \text{ i.e. } f(u) = u \quad (f - 2\text{Id}_E)(u) = 0_E \text{ i.e. } f(u) = 2u.$$

D'où $f(u) = u = 2u$ et donc $u = 0_E$. D'où la deuxième inclusion.

• Finalement, $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.

- 6) -a- Posons p la projection sur $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
Soit $u \in E$, posons alors $u_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $u_2 \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ tels que $u = u_1 + u_2$.
Notons que $p(u) = u_1$ et $q(u) = u_2$ et $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = 2u_2$. Alors:

$$(p + q)(u) = p(u) + q(u) = u_1 + u_2 = u. \quad \text{Donc } p + q = \text{Id}_E.$$

Puis:

$$f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = u_1 + 2u_2 = p(u) + 2q(u) = (p + 2q)(u). \quad \text{Donc } f = p + 2q$$

Puis, comme $\begin{cases} p + q = \text{Id}_E \\ p + 2q = f \end{cases}$. $-L_1 + L_2$ donne $q = f - \text{Id}_E$ et $2L_1 - L_2$ donne $p = 2\text{Id}_E - f$.

- b- Soit $n \in \mathbb{N}$, $f^n = (p + 2q)^n$.

Notons que $p \circ q = p \circ (\text{Id}_E - p) = p - p \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $q \circ p = (\text{Id}_E - p) \circ p = p - p \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ car p est un projecteur donc $p \circ p = p$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton; pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \circ (2q)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} p^0 \circ (2q)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (2q)^{n-k} + \binom{n}{n} p^n (2q)^0 \\ &= 2^n q + p. \end{aligned}$$

Car pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $p^j = p$ et $q^j = q$ (que l'on peut montrer par récurrence).

Notons que pour $n = 0$, $2^0 q + p = q + p = \text{Id}_E = f^0$ et pour $n = 1$, $2^1 q + p = p + 2q = f$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = p + 2^n q$.

Exercice 12 Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- 1) Montrer que $f \in \text{GL}(E)$ et exprimer sa réciproque à l'aide de f et de ses itérées.
- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda^3 + \lambda^2 + 2 \neq 0$ alors $f - \lambda \text{Id}_E$ est inversible.

Correction -

1) $f \circ [-\frac{1}{2}(f^2 + f)] = [-\frac{1}{2}(f^2 + f)] \circ f = \text{Id}_E$ donc par caractérisation des bijections f est bijective de réciproque $-\frac{1}{2}(f^2 + f)$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons $\lambda^3 + \lambda^2 + 2 \neq 0$.

- f injective : montrons $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

L'inclusion \supset découle du fait que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est un sev de E .

Pour l'inclusion \subset . Soit $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ alors $f(x) = \lambda x$. Donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$. Et $f^3(x) = \lambda^3 x$. Alors par hypothèse $0_E = (f^3 + f^2 + 2\text{Id}_E)(x) = \lambda^3 x + \lambda^2 x + x = (\lambda^3 + \lambda^2 + 1)x$. Or $\lambda^3 + \lambda^2 + 1 \neq 0$ donc $x = 0_E$.

- f surjective : soit $y \in E$. Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = (f - \lambda \text{Id}_E)(x)$.

Analyse: soit $x \in E$ tel que $y = (f - \lambda \text{Id}_E)(x) = f(x) - \lambda x$. Alors

$$f(y) = f^2(x) - \lambda f(x) \quad f^2(y) = f^3(x) - \lambda f^2(x) = (-f^2(x) - 2x) - \lambda f^2(x) = -(1 + \lambda)f^2(x) - 2x.$$

Donc,

$$f^2(y) = -(1 + \lambda)(f(y) + \lambda f(x)) - 2x = -(1 + \lambda)(f(y) + \lambda(y + \lambda x)) - 2x.$$

Donc

$$f^2(y) = (1 + \lambda)f(y) + (\lambda^2 + \lambda)y + (\lambda^3 + \lambda^2 - 2)x.$$

Et comme $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 \neq 0$,

$$x = \frac{1}{\lambda^3 + \lambda^2 - 2} (f^2(y) - (1 + \lambda)f(y) - (\lambda^2 + \lambda)y).$$

Synthèse: on vérifie que ce x convient [...]

Donc f est bijective, donc f est inversible.

Exercice 13. ()** Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{Id}_E$. Montrer que

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j^2 \text{Id}_E).$$

Correction - On montre que tout $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'éléments de ces trois noyaux. Soit $x \in E$.

- 1) **Analyse.** Posons $x = a + b + c$ tel que $a \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, $b \in \text{Ker}(f - j \text{Id}_E)$, $c \in \text{Ker}(f - j^2 \text{Id}_E)$.

Notons que si $u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ alors $(f - \lambda \text{Id}_E)(u) = 0_E$ donc $f(u) = \lambda u$, et donc

$$f(a) = a \quad f(b) = jb \quad f(c) = j^2 c.$$

Alors,

$$f(x) = a + jb + j^2 c \quad f^2(x) = f(a) + jf(b) + j^2 f(c) = a + j^2 b + jc.$$

Alors

$$\begin{cases} x + f(x) + f^2(x) = 3a + (1 + j + j^2)b + (1 + j^2 + j)c = 3a \\ x + jf(x) + j^2 f^2(x) = (1 + j + j^2)a + (1 + j^2 + j)b + (1 + j^3 + j^3)c = 3c \\ x + j^2 f(x) + j f^2(x) = (1 + j^2 + j)a + (1 + j^3 + j^3)b + (1 + j + j^2)c = 3b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)) \\ c = \frac{1}{3}(x + jf(x) + j^2 f^2(x)) \\ b = \frac{1}{3}(x + j^2 f(x) + j f^2(x)) \end{cases}.$$

Ce qui prouve l'unicité.

- 2) **Synthèse.** La décomposition ci-dessus convient [...]

- 3) $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j^2 \text{Id}_E)$.

Exercice 14. ()** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires.

- 1) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
- 2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ avec x et y non nuls, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
- 3) Montrer alors que f est une homothétie vectorielle.

Correction -

- 1) Soit $x \in E$. Comme x et $f(x)$ sont colinéaires alors $(x, f(x))$ est liée, posons alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $\alpha x + \beta f(x) = 0_E$. Si $\beta \neq 0$ alors $f(x) = -\frac{\alpha}{\beta} x$. Si $\beta = 0$ alors $\alpha x = 0_E$ donc $x = 0_E$ car $\alpha \neq 0$ donc $f(0_E) = 0_E = 1 \times 0_E$.

Donc, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

- 2) Soit $(x, y) \in E^2$, x, y non nuls.
 Si (x, y) est liée alors $y = \alpha x$ où $\alpha \in K$. Alors $f(x) = \lambda_x x$. Puis d'une part $f(y) = \lambda_y y$ et d'autre part $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x (\alpha x) = \lambda_x y$. Or $y \neq 0$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.
 Supposons (x, y) libre. Alors, d'une part, $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ et d'autre part $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.
 Donc

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y \text{ c'est-à-dire } (\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_E.$$

Comme la famille (x, y) est libre, alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

- 3) Fixons $a \in E$, $a \neq 0_E$ alors pour tout $x \in E$, $x \neq 0_E$ d'après 2), $\lambda_x = \lambda_a$ donc : $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda_a x$. On pose $\alpha = \lambda_a$ alors pour tout $x \in E$, $f(x) = \alpha x$ (fonctionne aussi pour $x = 0_E$, dans ce cas on a $0_E = 0_E$). Donc f est une homothétie vectorielle.

Exercice 17. (\heartsuit) Montrer que l'application $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (-3x + 2y, -4x + 3y)$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Correction - Tout d'abord $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Puis, soient $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} s(\lambda(x, y) + (x', y')) &= s(\lambda x + x', \lambda y + y') = (-3(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), -4(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y')) \\ &= \lambda(-3x + 2y, -4x + 3y) + (-3x' + 2y', -4x' + 3y') = \lambda s(x, y) + s(x', y'). \end{aligned}$$

Donc $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Enfin, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$s^2(x, y) = s(-3x + 2y, -4x + 3y) = (-3(-3x + 2y) + 2(-4x + 3y), -4(-3x + 2y) + 3(-4x + 3y)) = (x, y) \quad \text{donc} \quad s^2 = \text{Id}_E.$$

Finalement s est une symétrie de \mathbb{R}^2 de base $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et de direction $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \Leftrightarrow s(x, y) - (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (-4x + 2y, -4x + 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow y = 2x.$$

$$(x, y) \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E) \Leftrightarrow s(x, y) + (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (-2x + 2y, -4x + 4y) = (0, 0) \Leftrightarrow y = x.$$

Finalement $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \{(x, 2x) / x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 2))$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1))$.

Donc s est la symétrie par rapport à $\text{Vect}((1, 2))$ et parallèlement à $\text{Vect}((1, 1))$.

Exercice 18. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E .

- 1) Montrer que $p \circ q = p \Leftrightarrow \text{Ker } q \subset \text{Ker } p$.
- 2) Montrer que $p \circ q = q \Leftrightarrow \text{Im } q \subset \text{Im } p$.
- 3) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_E$.

Correction -

- 1) Supposons $p \circ q = p$. Montrons que $\text{Ker } q \subset \text{Ker } p$.

Soit $x \in \text{Ker } q$. Alors par hypothèse $p(x) = (p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(0_E) = 0_E$ car $x \in \text{Ker } q$ implique $q(x) = 0_E$. D'où $x \in \text{Ker } p$.
 Donc $\text{Ker } q \subset \text{Ker } p$.

Réciproquement, supposons $\text{Ker } q \subset \text{Ker } p$. Montrons que $p \circ q = p$. Soit $x \in E$,

$$q^2(x) = q(x) \quad \text{donc} \quad q(q(x) - x) = 0_E \quad \text{donc} \quad q(x) - x \in \text{Ker } q \subset \text{Ker } p \quad \text{donc} \quad p(q(x) - x) = 0_E \quad \text{i.e.} \quad (p \circ q)(x) = p(x).$$

On a donc $p \circ q = p$. Finalement $p \circ q = p \Leftrightarrow \text{Ker } q \subset \text{Ker } p$.

- 2) Supposons $p \circ q = q$. Montrons que $\text{Im } q \subset \text{Im } p$.

Soit $y \in \text{Im } q$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = q(x)$. Or $q = p \circ q$ donc $y = (p \circ q)(x) = p(q(x))$, donc $y \in \text{Im } p$. D'où $\text{Im } q \subset \text{Im } p$.

Réciproquement, supposons $\text{Im } q \subset \text{Im } p$. Montrons que $p \circ q = q$. Soit $x \in E$, alors $q(x) \in \text{Im } q \subset \text{Im } p$ donc il existe $a \in E$ tel que $q(x) = p(a)$. Alors $(p \circ q)(x) = p^2(a) = p(a)$ car p est un projecteur donc $(p \circ q)(x) = q(x)$. D'où $p \circ q = q$.

Finalement, $p \circ q = q \Leftrightarrow \text{Im } q \subset \text{Im } p$.

- 3) Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors $(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$ et donc $p + q$ est un projecteur.

Réciproquement supposons que $p + q$ est un projecteur i.e. $p + q = (p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q$ ce qui équivaut à $p \circ q + q \circ p = 0$ (*). En composant par p à gauche et à droite il vient $\begin{cases} p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \\ p \circ q \circ p + q \circ p = 0 \end{cases}$. Donc en soustrayant, il

vient $p \circ q - q \circ p = 0$ (**). Enfin en additionnant et en soustrayant (*) et (**) il vient $p \circ q = q \circ p = 0$.

Donc: $p + q$ est un projecteur $\Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0_E$.

Exercice 21. (**) Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, p un projecteur de E et $q = \text{Id}_E - p$ le projecteur associé à p . On pose

$$G = \{g \in \mathcal{L}(E) / \exists u \in \mathcal{L}(E), g = u \circ p\} \quad H = \{h \in \mathcal{L}(E) / \exists v \in \mathcal{L}(E), h = v \circ q\}.$$

Montrer que $G \oplus H = \mathcal{L}(E)$.

Correction - On montre que tout $f \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit de manière unique sous forme $f = g + h$ où $g \in G$ et $h \in H$, en raisonnant par analyse-synthèse.

[...] On trouve $f = f \circ p + f \circ q$.

Exercice 23. (*) On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et l'application $\varphi : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{array}$. Montrer que φ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \text{Ker } \varphi$.

Correction - φ est une forme linéaire [*laissée au lecteur*].

De plus φ est non nulle ($\varphi(\text{exp}) = \text{exp}(0) = 1 \neq 0$) donc $H = \text{Ker } \varphi$ est un hyperplan. D'après le théorème de caractérisation des hyperplans, $\text{Vect}(\text{exp})$ est un supplémentaire de H (car $\text{exp} \in E \setminus H$).