Exercice 2. (♡) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Correction - D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \left(\int_a^b 1\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \sqrt{b-a}\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}} \quad \text{donc } \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Or les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne sont pas proportionnelles, donc il n'y a pas égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Donc $\boxed{\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}}$.

Exercice 3. $(*)$ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ non nulle telle que $f(0) = 0$.

1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\forall x \in [0,1], \quad f^2(x) \leqslant x\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

2) Montrer: $\dfrac{\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2\,\mathrm{d}t} \geqslant 2$.

Correction -

1) Soit $x \in [0,1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x)$. Puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On élève au carré, cette inégalité où les deux membres sont positifs, pour obtenir $\boxed{f^2(x) \leqslant x\displaystyle\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t.}$

2) On en déduit pour $x \in [0,1]$, $f^2(x) \leqslant x\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$ car $(f')^2 \geqslant 0$ et d'après la relation de Chasles.
On intègre cette inégalité par rapport à x,

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

On peut donc diviser par $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ qui est non nulle par application du théorème de nullité de l'intégrale (car f^2 est positive, continue et il existe $a \in [0,1]$ tel que $f^2(a) > 0$ car f est non nulle), on obtient l'inégalité voulue.

Exercice 6. $(*)$ Soit f continue sur $[0,1]$ et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe dans $[0,1]$.

Correction - Posons pour $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. Il s'agit de prouver que g s'annule.
Remarquons que: $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - [\frac{1}{2}x^2]_0^1 = 0$.
g est continue sur $[0,1]$, comme combinaison linéaire de f et $x \mapsto x$ qui le sont.
Méthode 1 : où on utilise le TVI. Par l'absurde supposons que g ne s'annule pas, alors g garde un signe constant. En effet si au contraire, g change de signe on peut poser α et β réels tels que $g(\alpha) \leqslant 0$ et $g(\beta) \geqslant 0$. Et comme par ailleurs g est continue sur $[0,1]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiares, g s'annule entre α et β.
Comme donc, g garde un signe constant, alors $g \geqslant 0$ (ou $g \leqslant 0$). Comme par ailleurs, $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $0 < 1$, alors d'après le théorème de nullité de l'intégrale, g est la fonction nulle. Ce qui est absurde, car on a supposé que g ne s'annule pas (même raisonnement pour le cas $g \leqslant 0$).
Donc g s'annule, donc $\boxed{f \text{ admet au moins un point fixe dns } [0,1]}$.

Méthode 2 : où on utilise le théorème de Rolle. On pose G une primitive de g sur $[0,1]$, alors $G(1) - G(0 = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ donc $G(1) = G(0)$. De plus G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, alors il existe $c \in]0,1[$ tel que $G'(c) = 0$ c'est-à-dire $g(c) = 0$.

Exercice 8. $(*)$ Soient f et g continues sur le segment $[a,b]$ telles que g est positive.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction - **Premier cas :** si g est la fonction nulle ou si $a=b$ alors $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et donc tout c convient.
Second cas : supposons que g n'est pas la fonction nulle et $a<b$.
f est continue sur le segment $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [m,M]$ où m, M sont deux réels.
Donc pour $t \in [a,b]$, comme $g(t) \geqslant 0$ alors

$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t).$$

Donc en intégrant bornes croissantes,

$$m\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On divise par $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ qui est strictement positive par application du théorème de nullité de l'intégrale (g est continue, $a<b$, $g \geqslant 0$, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) > 0$) alors

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant M.$$

Et comme $[m,M] = f([a,b])$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} = f(c)$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9. $(**)$ Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Correction - **Rem :** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ correspond à l'intégrale du prolongement par continuité de $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, ce prolongement est continu sur le segment $[0,1]$.
L'inégalité à prouver découle de la décroissance de la fonction g sur $[0,\pi]$.

- f est décroissante sur $[0,\pi]$. *Etudier le signe de la dérivée de f, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. On étudie le signe du numérateur en étudiant les variations de $x \mapsto x\cos x - \sin x$.*
- Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geqslant f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ puis on intègre bornes croissantes, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi} = 1$.
  Pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $f(x) \leqslant f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ puis on intègre bornes croissantes, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi} = 1$.
  On obtient les inégalités strictes, en appliquant le théorème de nullité de l'intégrale plutôt que la croissance de l'intégrale *(juste de la rédaction).*
- Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x}$.

Exercice 10. $(**)$ Montrer que pour tout $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha < \beta$, on a $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \dfrac{2}{\alpha}$.

Correction - Soit $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha<\beta$. On pose $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} & u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t) & v(t) = -\cos(t) \end{cases}$ alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{t}\cos(t)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\beta}\cos(\beta) + \frac{1}{\alpha}\cos(\alpha) - \int_\alpha^\beta \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |I| &\leqslant \underbrace{\frac{1}{|\beta|}|\cos(\beta)|}_{\leqslant \frac{1}{\beta}} + \underbrace{\frac{1}{|\alpha|}|\cos(\alpha)|}_{\leqslant \frac{1}{\alpha}} + \underbrace{\left|\int_\alpha^\beta \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|}_{\leqslant \int_\alpha^\beta \frac{|\cos(t)|}{|t^2|}\,\mathrm{d}t} \text{ (inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} + \int_\alpha^\beta \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} + \left[-\frac{1}{t}\right]_\alpha^\beta \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\alpha} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \frac{2}{\alpha}}$.

Exercice 14. $(*)$ Soit f continue sur $[0,1]$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2) On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer la limite de $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Utiliser ce qui précède pour déterminer la limite et un équivalent de $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Correction - Soit f continue sur $[0,1]$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, par majoration en valeur absolue,

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \int_0^1 |t^n||f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Or f, donc $|f|$ aussi est continue sur le segment $[0,1]$ donc est bornée. Posons, $M = \max\limits_{[0,1]} |f|$. Donc pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant M$ et donc $t^n|f(t)| \leqslant Mt^n$. Par croissance de l'intégrale, il vient:

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant M\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{M}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, par théorème d'enacadrement, $\boxed{\lim u_n = 0}$.

2) On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$.

On pose $\begin{cases} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = t^n & v(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1} \end{cases}$ alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 f'(t)t^{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1}f(1) - \frac{1}{n+1}\int_0^1 f'(t)t^{n+1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Donc $nu_n = \dfrac{n}{n+1}f(1) - \dfrac{n}{n+1}\displaystyle\int_0^1 f'(t)t^{n+1}\,\mathrm{d}t$. Or, par majoration en valeur absolue,

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 f'(t)t^{n+1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f'(t)||t^{n+1}|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f'(t)|t^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Or, comme en 1), on prouve $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|t^{n+1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puis $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc par opérations sur les limites, $\boxed{nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)}$.

3) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{1+t}\,\mathrm{d}t$. On a $J_n = u_n$ avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. D'après 1), $\boxed{\lim J_n = 0}$.

D'après 2), $nJ_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1) = 2$ donc $nJ_n \underset{+\infty}{\sim} 2$ donc $\boxed{J_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}}$.

Exercice 16. $(*)$ Déterminer les limites suivantes:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\lim_{x\to0} \int_0^1 t^2\sqrt{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t.$

Correction -

1) Soit $x > 0$, $t \in [x, 2x]$. L'application $\dfrac{1}{\ln}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $\dfrac{1}{\ln(2x)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(x)}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(2x)} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(x)} \quad \text{donc} \quad \frac{x}{\ln(2x)} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \leqslant \frac{x}{\ln(x)}.$$

Or $\dfrac{x}{\ln(2x)} = \dfrac{x}{\ln(2)+\ln(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées et $\frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, par théorème d'encadrement $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = 0}$.

2) Soit $x>0$. On pose $\begin{cases} u(t)=\frac{1}{t} & u'(t)=-\frac{1}{t^2} \\ v'(t)=\sin(t) & v(t)=-\cos(t) \end{cases}$ alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,2x]\subset\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{t}\cos(t)\right]_x^{2x} - \int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2x}\cos(2x)+\frac{1}{x}\cos(x)-\int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puis

- $0\leqslant\left|\frac{1}{2x}\cos(2x)\right|=\frac{1}{2x}|\cos(2x)|\leqslant\frac{1}{2x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
  Donc par théorème d'encadrement $\frac{1}{2x}\cos(2x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- De même $\frac{1}{x}\cos(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- Puis, par majoration en valeur absolue puis croissance de l'intégrale,

$$0\leqslant\left|\int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{2x}\frac{|\cos(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Donc par opérations sur les limites, $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=0}$

3) Soit $x>0$, $t\in[x,2x]$, alors

$$\ln(x)\leqslant\ln(t)\leqslant\ln(2x)\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{1+16x^4}\leqslant\frac{1}{1+t^4}\leqslant\frac{1}{1+x^4}.$$

Donc comme toutes les quantités sont positives, on fait le produit puis on intègre bornes croissantes,

$$\frac{\ln x}{1+16x^4}\leqslant\frac{\ln t}{1+t^4}\leqslant\frac{\ln(2x)}{1+x^4}\qquad\text{donc en intégrant}\qquad\frac{x\ln x}{1+16x^4}\leqslant\int_x^{2x}\frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{x\ln(2x)}{1+x^4}.$$

Puis $\frac{x\ln x}{1+16x^4}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{16x^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées. Et $\frac{x\ln(2x)}{1+x^4}=\frac{x\ln(2)+x\ln(x)}{1+x^4}\underset{+\infty}{=\sim}\frac{\ln x}{x^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Donc par théorème d'encadrement, $\boxed{\int_x^{2x}\frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0}$.

Exercice 17. (**) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\int_{\mathrm{e}}^{x}\ln(\ln t)\,\mathrm{d}t\underset{+\infty}{\sim}x\ln(\ln x)$.

Correction - Préliminaire : un encadrement ne donne rien donc on tente autre chose...
Une intégration par parties, (*en vous laissant deviner les fonctions posées et rédiger*), donne tout d'abord

$$\int_{\mathrm{e}}^{x}\ln(\ln t)\,\mathrm{d}t=x\ln(\ln x)-\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Reste à prouver que $\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}=\mathrm{o}_{+\infty}(x\ln(\ln x))$.
Soit $x\geqslant\mathrm{e}$, $t\in[\mathrm{e},x]$, $1\ln t\leqslant\ln x$, donc $\frac{1}{\ln x}\leqslant\frac{1}{\ln t}\leqslant1$ et donc en intégrant bornes croissantes

$$\frac{x-\mathrm{e}}{\ln x}\leqslant\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\leqslant x-\mathrm{e}\qquad\text{donc}\qquad\frac{x-\mathrm{e}}{x\ln x\ln(\ln x)}\leqslant\frac{\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}}{x\ln(\ln x)}\leqslant\frac{x-\mathrm{e}}{x\ln(\ln x)}.$$

Or $\frac{x-\mathrm{e}}{x\ln x\ln(\ln x)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln x\ln(\ln x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\frac{x-\mathrm{e}}{x\ln(\ln x)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln(\ln x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc par théorème d'encadrement $\frac{\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}}{x\ln(\ln x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ ce qui prouve comme voulu $\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}=\mathrm{o}_{+\infty}(x\ln(\ln x))$. et donc $\boxed{\int_{\mathrm{e}}^{x}\ln(\ln t)\,\mathrm{d}t\underset{+\infty}{\sim}x\ln(\ln x)}$.

Exercice 18. (**) Soient x et a deux réels tels que : $x>a>\mathrm{e}$. Montrer que : $\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}<\frac{2x}{\ln x}$.

Correction - Préliminaire :

- on essaye d'abord une majoration en majorant l'intégrande...Pas concluant.
- on essaye ensuite une intégration par parties, puis des des majorations. Pas concluant non plus...
- on essaye enfin une étude de fonction (cf. ci-dessus)

On pose pour $x > a > e$, $f(x) = \dfrac{2x}{\ln x} - \displaystyle\int_a^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. f est dérivable sur $]a, +\infty[$ comme différence de $x \mapsto \frac{2x}{\ln x}$ qui l'est par quotient de fonctions usuelles et $x \mapsto \displaystyle\int_a^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ que l'on reconnaît comme une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$, et pour $x > a$,

$$f'(x) = \frac{2\ln x - 2}{(\ln x)^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln x - 2}{\ln(x)^2}.$$

x	a		e^2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$f(\mathrm{e}^2)$	$\nearrow$	

Donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^2$ d'où le tableau de variations de f.

Reste à prouver que $f(\mathrm{e}^2) \geqslant 0$. Or $f(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^2 - \displaystyle\int_a^{\mathrm{e}^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
Pour montrer cette inégalité on passe par une autre étude de fonction. On pose pour $x \geqslant a > e$, $g(x) = x - \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, g est dérivable sur $[a, +\infty[$ avec

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln x} \geqslant 0.$$

Donc g est croissante sur $[a, +\infty[$, or $g(a) = a > 0$ donc $g > 0$ donc $g(e^2) > 0$ donc $f(e^2) > 0$ donc $f > 0$ et donc $\boxed{\displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x}}$.

Exercice 21. $(*)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Étudier la parité de f.
3) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
4) En déduire les variations de f.
5) À l'aide d'un encadrement, déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

Correction - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}$.

1) Posons $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} = (t^4+1)^{-\frac{1}{2}}$.
$t \mapsto t^4 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc par composition, g est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}} = \int_x^{2x} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(-u)^4+1}} \qquad \text{(on a posé } t = -u\text{)} \\ &= -\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4+1}} = -f(x) \qquad \boxed{\text{Donc } f \text{ est impaire}} \end{aligned}$$

3) Posons G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = G(2x) - G(x).$$

Or $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par composition, puis par différence, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{\sqrt{8x^4+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}.$$

4) Puis pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{8x^4+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \Leftrightarrow \frac{4}{8x^4+1} \geqslant \frac{1}{x^4+1} \qquad \text{(tout est positif et } t \mapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+\text{)} \\ &\Leftrightarrow 4(x^4+1) \geqslant 8x^4 + 1 \Leftrightarrow 4x^4 \leqslant 3 \Leftrightarrow x^2 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations.

5) Soit $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$ alors:

$$\begin{aligned} & 1 + x^4 \leqslant 1 + t^4 \leqslant 1 + 8x^4 \\ \text{donc} \quad & \sqrt{1+x^4} \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant \sqrt{1+8x^4} \quad \text{(la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}_+\text{)} \\ \text{d'où} \quad & \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+8x^4}} \quad \text{(la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+\text{).} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale:

$$\frac{2x-x}{\sqrt{1+x^4}} \geqslant f(x) \geqslant \frac{2x-x}{\sqrt{1+8x^4}} \qquad \text{donc} \qquad \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geqslant f(x) \geqslant \frac{x}{\sqrt{1+8x^4}}.$$

Or $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{x^4}} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{x}{\sqrt{1+8x^4}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{8x^4}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Par imparité de f, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 22. $(**)$ Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(\frac{b}{a})$.

Correction - Pour $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Pour t au voisinage de 0, $\sin t = t + \mathrm{o}(t^2)$ donc

$$\frac{\sin t}{t^2} = \frac{1}{t} + \mathrm{o}(1) = \frac{1}{t} + h(t) \qquad \text{où} \qquad h(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Alors h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$.
Notons que par ailleurs, $h(t) = \dfrac{\sin t}{t^2} - \dfrac{1}{t}$ donc h est continue sur $\mathbb{R}^*$. Et donc h est continue sur $\mathbb{R}$.
Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t} + h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{ax}^{bx} h(t)\,\mathrm{d}t = \ln(\frac{b}{a}) + \int_{ax}^{bx} h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme h est continue sur $\mathbb{R}$, on pose H une primitive de h sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(\frac{b}{a}) + H(bx) - H(ax).$$

On fait tendre x vers 0, par continuité de H en 0,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(\frac{b}{a}) + H(0) - H(0) = \ln(\frac{b}{a}).$$

Exercice 23. $(*)$ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer l'expression de g'.

Correction - NB : *la difficulté réside dans le fait que x est présent dans l'intégrande, il faut donc se ramener à des choses que l'on sait faire en faisant en sorte par exemple que x ne soit que dans les bornes pour se ramener à $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)\,\mathrm{d}t$ que l'on sait traiter. Un changement de variable permet d'y parvenir.*
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u = t + x$ dans l'intégrale $\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$, alors

$$g(x) = \int_x^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

On pose alors F une primitive sur $\mathbb{R}$ de f (continue sur $\mathbb{R}$), de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = F(2x) - F(x).$$

Puis par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ avec : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x).}$

Exercice 24. $(*)$ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On note encore F ce prolongement.
2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

Correction - Notons φ une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (existe car f continue)

1) Pour $x \in \mathbb{R}^*$,
$$F(x) = \frac{1}{2x}(\varphi(x) - \varphi(-x)).$$
Or φ est dérivable en 0, on peut écrire son $DL_1(0)$,
$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \mathrm{o}(x) = \varphi(0) + xf(0) + \mathrm{o}(x)$$
Donc
$$F(x) = \frac{1}{2x}(\varphi(0) + x\varphi'(0) - (\varphi(0) - x\varphi'(0)) + \mathrm{o}(x)) = f(0) + \mathrm{o}(1).$$
Donc $F(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$ donc F est prolongeable par continuité en posant $\boxed{F(0) = f(0)}$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = \frac{1}{2x}(\varphi(x) - \varphi(-x))$. Comme φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors par opérations $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.
Puis après calculs,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad F'(x) = \frac{f(x) + f(-x) - 2F(x)}{2x}}.$$

3) Pour $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} (f(t) - f(0))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} tf'(0) + th(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{où} \quad h(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0\\ &= \underbrace{\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} tf'(0)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} th(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} th(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Soit $\varepsilon > 0$, comme $h(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ alors posons $\delta > 0$ tel que
$$\forall t \in [-\delta, \delta], \quad |h(t)|\varepsilon.$$
On prend $x > 0$, $]0, \delta]$, alors
$$\left|\int_{-x}^{x} th(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-x}^{x} t|h(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant\leqslant \varepsilon \int_{-x}^{x} |t|\,\mathrm{d}t = \varepsilon x^2.$$
Donc
$$\left|\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$
Donc
$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Donc $\boxed{F \text{ est dérivable en 0 avec } F'(0) = 0}$.

Exercice 26. $(*)$ Calculer les limites des suites définies par les termes généraux suivants

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Correction -

1) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}$. Alors
$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{\frac{(2n)^2}{4} + k^2} = T_{2n} \quad \text{où} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\frac{n^2}{4} + k^2}.$$
On a donc
$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{1}{4} + (\frac{k}{n})^2} - 0 + \frac{n}{\frac{5n^2}{4}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \frac{4}{5n} \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{x}{\frac{1}{4} + x^2}.$$
f est continue sur $[0, 1]$ donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{4} + x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 5.$$
Donc $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\ln 5$ et donc $\boxed{S_n = T_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln 5}$.

2) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement d'indice, $j = k - n$,
$$S_n = \sum_{j=0}^{(p-1)n} \frac{1}{j + n} = \sum_{j=0}^{(p-1)n} \frac{1}{j + \frac{n(p-1)}{p-1}} = T_{n(p-1)} \quad \text{où} \quad T_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j + \frac{n}{p-1}}.$$

On a donc

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{j}{n}+\frac{1}{p-1}} + \frac{1}{n+\frac{n}{p-1}} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\frac{j}{n}) + \frac{1}{n+\frac{n}{p-1}} \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{p-1}}.$$

f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\frac{j}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x+\frac{1}{p-1})\right]_0^1 = \ln(1+\frac{1}{p-1}) - \ln(\frac{1}{p-1}) = \ln p.$$

Donc $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln p$ et donc $\boxed{S_n = T_{(p-1)n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln p}$.

Exercice 27. ($\heartsuit$) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer l'inégalité $\left|\int_0^1 f\right| \leqslant \int_0^1 |f|$ à l'aide sommes de Riemann.

Correction - Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |f|(x_k).$$

Tout d'abord, d'après l'inégalité triangulaire, $|S_n| \leqslant T_n$. $(*)$. Par ailleurs, d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$S_n \underset{n\,\to\,+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad T_n \underset{n\,\to\,+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 |f|(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc, le passage à la limite de l'inégalité $(*)$ donne $\boxed{\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x}$.

Exercice 28. $(*)$ En faisant apparaitre une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Correction - Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = n\sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \underset{n\,\to\,+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}.$$

Donc $\boxed{S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}}$.

Exercice 29. $(***)$ Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que f est positive.
Calculer la limite de $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{1+k}{n}\right)$.

Correction - Préliminaire: l'exercice aurait été facile si au lieu de S_n on avait eu $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$, car dans ce cas une simple application du théorème sur les sommes de Riemann aurait prouvé que $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Notons que S_n et T_n sont voisines, on va donc chercher à estimer la différence.
Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)}_{=T_n} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{1+k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{S_n-T_n}.$$

$$|S_n - T_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left|g\left(\frac{1+k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \qquad (*)$$

Or g est continue sur le SEGMENT $[0,1]$ donc est uniformément continue, d'après le théorème de Heine.
Soit $\varepsilon > 0$, posons $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon \qquad (**).$$

Posons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} \leqslant \delta$, et prenons $n \geqslant N$, alors pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\left|\dfrac{k+1}{n} - \dfrac{k}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \leqslant \delta$ et donc d'après $(**)$,

$$\left|g\left(\frac{1+k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On reporte dans $(*)$, on a donc pour $n \geqslant N$,

$$|S_n - T_n| \leqslant \varepsilon \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

Enfin $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ est bornée par un $K \in \mathbb{R}_+$, car admet une limite finie ($\displaystyle\int_0^1 |f|$ d'après la théorème sur les sommes de Riemann) alors

$$\forall n \geqslant N, \quad |S_n - T_n| \leqslant K\varepsilon.$$

On retrouve donc la définition de $S_n - T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement en revenant à $S_n = T_n + (S_n - T_n)$ et donc $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}$.

Exercice 31. (♡) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$. Montrer que: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \cos x$.

Correction - Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n+1$ (cos est de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$) à la fonction cos en 0:

$$|\cos(x) - S_n(x)| = \left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{|x-0|^{2n+1}}{(2n+1)!} \max_{[0,x]ou[x,0]} |\cos^{(n+1)}| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Finalement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \cos x}$.

Exercice 32. $(*)$ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Correction - Application simple de la formule de Taylor Young, on trouve : $f''(a)$. *Calculs laissés au lecteur.*

Exercice 33. $(**)$ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que f et f'' soient bornées. On pose

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \qquad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|.$$

1) Déterminer l'existence de M_0 et M_2.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $h > 0$,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

3) En déduire l'existence de M_1 et prouver que

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Correction -

1) Découle de f et f'' bornées sur $\mathbb{R}$.
2) On utilise la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} f''(t)(x+h-t)\,\mathrm{d}t \quad \text{c'est-à-dire} \quad hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \int_x^{x+h} f''(t)(x+h-t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc par inégalité triangulaire et majoration en valeur absolue ($x \leqslant x+h$) :

$$|hf'(x)| \leqslant |f(x+h)| + |f(x)| + \int_x^{x+h} |f''(t)||x+h-t|\,\mathrm{d}t \leqslant 2M_0 + M_2 \int_x^{x+h} (x+h-t)\,\mathrm{d}t.$$

On calcule l'intégrale

$$\int_x^{x+h} (x+h-t)\,\mathrm{d}t = [-\frac{1}{2}(x+h-t)^2]_x^{x+h} = \frac{h^2}{2}.$$

D'où

$$h|f'(x)| \leqslant 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}}.$$

3) On fixe $h > 0$. L'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$M_1 \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} \text{ ce pour tout } h > 0.$$

On pose la fonction $g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ une simple étude de cette fonction montre qu'elle admet un minimum en $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, ce minimum vaut $2\sqrt{M_0 M_2}$.
On prend donc $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ dans l'inégalité ci-dessus, pour obtenir

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 34. $(***)$ Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$.
On commencera par linéariser $\sin^2 x$ *puis on transformera l'expression à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2.*

Correction - Préliminaire : on pense évidemment à une somme de Riemann. La difficulté réside dans le fait que l'on ne peut "rentrer" le $\dfrac{1}{n}$ dans sin pour donner un $\sin\dfrac{k}{n}$, il n'y a pas de formule sur le sinus qui permet de faire ça. L'idée est donc de remplacer $\sin^2 \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ par une expression qui permettrait de faire apparaître une somme de Riemann et dans le même temps pouvoir contrôler l'erreur commise. La formule de Taylor permet de faire tout ça !

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ or d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\left|\cos(u) - 1 + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{u^3}{6} \sup_{[0,u]} |\cos^{(3)}| \leqslant \frac{u^3}{6}.$$

Avec $u = 2x$,

$$\left|\cos(2x) - 1 + 2x^2\right| \leqslant \frac{4x^3}{3} \quad \text{donc} \quad \left|\frac{1-\cos(2x)}{2} - x^2\right| \leqslant \frac{2x^3}{3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\sin^2 x - x^2\right| \leqslant \frac{2x^3}{3}.$$

Conclusion,

$$\sin^2 x = x^2 + \underbrace{(\sin^2 x - x^2)}_{h(x)} \quad \text{où} \quad 0 \leqslant |h(x)| \leqslant \frac{2x^3}{3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + h\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}_{=S_n} + \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} h\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}_{=T_n}.$$

Pour S_n, on reconnaît une somme de Riemann,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\frac{j}{n}+1} + \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

Pour T_n, on majore en valeur absolue, en exploitant $|h(x)| \leqslant \frac{2x^3}{3}$

$$\begin{aligned}
|T_n| &\leqslant \sum_{k=n}^{2n} \left|h\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{2}{3}\frac{1}{k\sqrt{k}} \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{2}{3}\frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \text{(en majorant chaque } \tfrac{1}{k\sqrt{k}} \text{ par } \tfrac{1}{n\sqrt{n}}) \\
&\leqslant \frac{2}{3\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2}$.