Chapitre
Probabilités sur un univers fini

I Vocabulaire probabiliste

Définition (Expérience - Univers)

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.
On s'intéresse aux **résultats / issues** possibles appelés **réalisations/évenutalités**. L'ensemble des résultats possibles est appelé **univers** (un univers des possibles).
L'**univers** est noté Ω en général.

Exemples

1) Lancer de dé à 6 faces: $\Omega = [\![1,6]\!]$. On le lance deux fois de suite : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, $(1,3)$ est une issue possible.
2) Lancer de deux dés, on s'intéresse à la somme des faces : $\Omega = [\![2,12]\!]$.
3) Lancer d'une pièce: $\Omega = \{P,F\}$. Lancer d'une pièce trois fois de suite: $\Omega = \{P,F\}^3$, (P,P,F) est issue possible.

Dans tout ce chapitre Ω est un univers fini (il ne le sera plus forcément en 2ème année).

Définition (Évènement)

- Un **évènement** aléatoire A est un regroupement d'issues possibles défini par une propriété commune. De façon ensembliste, un événement A est une partie de Ω c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- À l'issue d'une expérience aléatoire, on dit que l'évènement A est **réalisé** si le résultat ω de l'expérience est élément de A.
$\omega \in A$ se dit "ω réalise l'évènement A".
- Ω est l'**évènement certain**, $\emptyset$ est l'**événement impossible**.
- Un **évènement élémentaire** est un singleton $\{\omega\}$.

Exemples

1) Lancer de dé à 6 faces : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
On pose les événements A : "le numéro est pair" et B : "le numéro est multiple de 5".

   Alors $A =$ et $B =$.

2) Lancer d'une pièce trois fois de suite : $\Omega = \{P,F\}^3$. On pose l'événement A : "exactement deux piles sont tirés".

   Alors $A =$

Remarques

Dans ces chapitre de probabilités, on identifiera l'évènement décrit par une phrase avec l'ensemble partie de Ω.

Définition (Opérations ensemblistes)

Soit Ω un univers fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ deux événements.

- A **et** B. L'événement "A et B" est $A \cap B$.
- A **ou** B. L'événement "A ou B" est $A \cup B$.
- **Evénement contraire**. L'événement "$\overline{A}$" est modélisé par $A^c = \Omega \setminus A$ et appelé **événement contraire** de A..
- **Evénements incompatibles**. Les événements A et B sont dits **incompatibles** lorqu'ils ne peuvent être réalisés simultanément c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.
- **Système complet d'événements.** On appelle **système complet d'évènements** (SCE) toute famille finie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ qui forme une partition de Ω c'est-à-dire :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \qquad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

  Cas particulier: A et $\overline{A}$ forment un SCE.

Remarques (Formules utiles)

Soient A, B, C trois événèments d'un univers Ω

- **Distributivité.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- **Formule de De Morgan.** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exemple

1) Lancer de dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les évènements A: "le numéro est pair" et B: "le numéro est impair" forment un SCE.

2) Lancer d'une pièce trois fois de suite: $\Omega = \{P, F\}^3$. Les évènements A_i:"obtenir i pile" pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ forment un SCE.

II Espaces probabilisés finis

II.1 Application probabilité

Définition (Application probabilité)

Soit Ω un univers fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie les propriétés suivantes:

- $P(\Omega) = 1$
- si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On dit alors que (Ω, P) est un **espace probabilisé fini**. Pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ est appelé probabilité de A.

✎ **En pratique** ✎ On n'utilise pas cette définition pour montrer qu'on a affaire à un espace probabilisé. On montre plutôt la caractérisation ci-dessous.

Théorème (Caractérisation des probabilités)

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini.
Une probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est uniquement déterminée par la donnée des probabilités des évènements élémentaires $p_i = P(\{\omega_i\})$ telles que

$$p_i \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad (*).$$

On a alors:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

Une famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifiant $(*)$ est appelée **distribution de probabilités** sur Ω.

Exemple On lance une pièce, $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$. Soit $x \in [0,1]$. On définit une application P sur Ω par $P(\text{pile}) = x$ et $P(\text{face}) = 1 - x$. P définit bien une probabilité sur Ω.

Exercice. On lance une fois un dé à 6 faces truqué où la probabilité de sortie d'une face est proportionnelle à sa valeur. Déterminer l'univers de cet expérience et l'application probabilité. Puis déterminer la probabilité d'obtenir une face supérieure ou égale à 4.

II.2 Équiprobabilité ou probabilité uniforme

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini. On veut définir une probabilité P telle que tous les évènements élémentaires aient la même probabilité $p > 0$. On dit dans ce cas qu'il y a **équiprobabilité des issues**.
Il faut

$$\sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p = 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad p = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

On a alors par la caractérisation des probabilités,

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Théorème-Définition (Équiprobabilité ou probabilité uniforme)

Soit Ω un univers fini.
L'hypothèse d'**équiprobabilité** pour les évènements élémentaires définit une unique probabilité P, appelée **probabilité uniforme** qui vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{“nb cas favorables à } A\text{”}}{\text{“nb cas possibles”}}.$$

Remarques

- Il y a équiprobabilité dans les cas suivants :
  - lancer d'un dé non truqué
  - tirage de boules indiscernables au toucher
  - pile ou face avec une pièce équilibrée.
- Le calcul de probabilité dans un modèle d'équiprobabilité des issues se ramène à du dénombrement.

Exemples

1) Lancer d'un dé à 6 faces normal. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Déterminer la probabilité d'obtenir un chiffre pair.
2) Lancer de deux dés à 6 faces normaux, l'un vert l'autre rouge. Déterminer la probabilité d'obtenir deux chiffres pairs.
3) Lancer de deux dés à 6 faces normaux indiscernables. On s'intéresse à la somme des deux dés et donc l'univers $\Omega = [\![2, 12]\!]$. Y a t-il équiprobabilité des issues?

II.3 Propriétés des probabilités

Théorème (Propriétés des probabilités finies)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements. Alors

1) **Contraire**. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2) **Evénement impossible**. $P(\emptyset) = 0$
3) **Différence**. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
4) **Croissance**. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
5) **Réunion**. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice. Formule du crible. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1) Soient A, B, C trois événements. Déterminer $P(A \cup B \cup C)$.
2) Soit $A_1, \ldots, A_n$ n événements. Montrer que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P\left(\bigcap_{p=1}^{k} A_{i_p}\right)\right).$$

Théorème (Réunion de n événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n$ des événements.

1) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

2) Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux disjoints, alors : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Exercice.

1) **Jeu de cartes.** On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
   - -a- Quelle est la probabilité d'obtenir une main avec exactement 2 as?
   - -b- Quelle est la probabilité d'obtenir une main d'obtenir une main avec au moins un as?
   - -c- Quelle est la probabilité d'obtenir une main d'obtenir une main avec exactement un coeur et un roi?
2) **Lancer de dés**. On lance 6 fois un dé non truqué. Quelle est la probabilité d'obtenir les 6 numéros.
3) **Modèle d'urne.** Une urne contient N_1 boules blanches et N_2 boules noires. On pose $N = N_1 + N_2$.
   On tire n boules dans l'urne, on cherche la probabilité d'avoir exactement k blanches ($k \in [\![0, n]\!]$) dans les trois types de tirages :
   - tirage simultané $n \leqslant N$
   - l'une après l'autre sans remise
   - l'une après l'autre avec remise

III Probabilités conditionnelles

III.1 Définition

Motivation: on lance deux dés discernables, $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On considère les trois évènements:

- A: "la somme des chiffres est au moins égale à 9"

  $P(A) =$

- B: "le 1er dé donne un 3"

  $P(B) =$

- C: "le 1er dé donne un 6"

  $P(C) =$

On tient compte d'une information:

- probabilité de réaliser B sachant que A est réalisé: $\dfrac{\text{Card}(B \cap A)}{\text{Card}(A)} = \dfrac{1}{10}$
- probabilité de réaliser C sachant que A est réalisé: $\dfrac{\text{Card}(C \cap A)}{\text{Card}(A)} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ (on regarde $\text{Card}(C \cap A) = 4$ par raport à $\text{Card}(A) = 10$).
- probabilité de réaliser A sachant que C est réalisé: $\dfrac{\text{Card}(C \cap A)}{\text{Card}(C)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ (on regarde $\text{Card}(C \cap A) = 4$ par raport à $\text{Card}(C) = 6$).

Théorème-Définition (Probabilité conditionnelle)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et B un évènement tel que $P(B) > 0$.

- Pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ on définit **la probabilité conditionnelle de A sachant B** par:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{noté aussi } P(A \mid B).$$

- L'application $\begin{array}{rccc} P_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P_B(A) \end{array}$ est bien une probabilité sur Ω.

Remarques

- On ne sait pas définir $P_B(A)$ lorsque $P(B) = 0$, mais par convention, $P(B)P_B(A) = 0$ lorsque $P(B) = 0$ et donc l'égalité $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$ reste tout de même vraie dans ce cas.

- ⚠ **Attention** ⚠ Ne pas confondre la compréhension $P(A \cap B)$ et $P_B(A)$. Pour $P(A \cap B)$ on confronte les cas favorables à $A \cap B$ à tous les cas favorables à Ω, pour $P_B(A)$ on confronte les cas favorables à $A \cap B$ à tous les cas favorables à B.

- $P_B(A)$ est parfois noté $P(A \mid B)$, nous n'utiliserons pas cette notation, un peu ambigüe car $A \mid B$ n'est pas un événement.

Exemples

1) Dans une famille avec deux enfants. Déterminer la probabilité que:
   - les deux soient des garçons
   - les deux soient des garçons sachant que l'ainé est un garçon
   - les deux soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon

III.2 Probabilités composées

Théorème (Formule des probabilités composées)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1) **Cas de 2 événements**. Pour tous événements A et B,

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

(On a aussi $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.)

2) **Cas de n événements**. Soit $n \geqslant 2$. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exemple Une urne contient 9 boules blanches, 3 boules rouges. Chaque boule est tirée avec probabilité $\frac{1}{12}$.
On tire 3 boules une par une sans remise. Déterminer la probabilité que la première soit blanche, la deuxième blanche, la troisième rouge.

III.3 Probabilités totales

Théorème (Formule des probabilités totales)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Remarques (Cas particulier)

Soit A un évènement tel que $0 < P(A) < 1$. $(A, \overline{A})$ est un SCE. Alors:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}).$$

Exemple Retour sur l'exemple: urne contient 9 boules blanches, 3 boules rouges. On tire 3 boules une par une sans remise.
Déterminer la probabilité que la 2ème boule soit blanche.

Exercice. Une boîte A contient 3 boules roules et 5 boules blanches. Une boîte B contient 4 boules rouges et 2 boules blanches. On tire au hasard une boule de la boîte A et on la place dans la boîte B. Puis on tire au hasard une boule de la boîte B.
Déterminer la probabilité que cette boule soit blanche.

III.4 Formule de Bayes (probabilité des causes)

Retour sur l'exemple de l'urne contenant 9 blanches et 3 rouges.

- On a calculé la probabilité d'un deuxième tirage connaissant le premier, la fin connaissant le début, l'effet connaissant la cause (1er niveau de hasard)
- Inversement, on pourrait déterminer la probabilité d'un premier tirage connaissant le deuxième, le début connaissant la fin, la cause connaissant l'effet (2ème niveau de hasard).

On constate une boule blanche tirée au 2ème tirage, quelle est la probabilité d'avoir eu aussi une blanche au premier.

Théorème (Formules de Bayes)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1) **Cas de deux évènements**. Soient A et B deux évènements tel et $P(B) > 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}. \qquad P_B(A)\text{: \textit{probabilité que } } A \text{ \textit{soit la cause de} } B$$

2) **Cas de n évènements**. Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un SCE et B un évènement tel que $P(B) > 0$, alors:

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad P_B(A_j) = \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(B)}.$$

Exercice.
On évalue l'intérêt d'un test de détection de maladie (ça n'est pas un vaccin...) dans une population Ω. On définit les évènements:

T : "le test est positif" $\qquad$ M : "l'individu est malade".

On suppose:

- la population comporte 1% de malade i.e. $P(M) = 0.01$
- sachant que l'individu est malade, la probabilité que le test soit positif est $P_M(T) = 0.99$
- sachant que l'individu est sain, la probabilité que le test soit poitif est $P_{\overline{M}}(T) = 0.05$.

Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité d'être malade?
Quelle est la proportion de malade qui ne seront pas détectés?

IV Évènements indépendants

IV.1 Indépendance de 2 évènements

Intuitivement, deux évènements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre, dans ce cas:

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{et} \qquad P_A(B) = P(B)$$

Ce qui donne $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. D'où la définition:

Définition (Indépendance de deux évènements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
Deux évènements A et B sont dit **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarques

1) Si A et B sont indépendants (et de proba non nulle) on a donc bien $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

2) ⚠ **Attention** ⚠ Ne pas confondre incompatibilité et indépendance. Si A et B sont indépendants et de proba non nulle $P(A \cap B) = P(A)P(B) \neq 0$ donc $A \cap B \neq \emptyset$.
L'incompatibilité est une notion ensembliste, elle ne dépend que des ensembles, des événements ici.
L'indépendance est une notion probabiliste, qui dépend de la probabilité.

3) Si $P(A) = 0$ alors A et B sont indépendants pour tout B.
Car $P(A \cap B) \leqslant P(A) = 0$ donc $P(A \cap B) = 0$.

Exemple On lance un dé normal et on considère les événements :

A : "obtenir un nombre pair" $\qquad$ B : "obtenir un nombre impair".

Montrer que A et B sont incompatibles et dépendants.

Théorème (Indépendance et évènement contraire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux évènements indépendants.
Alors A et $\overline{B}$, (resp. $\overline{A}$ et B), (resp. $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants.

IV.2 Indépendance de n évènements

Définition (Indépendance)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'évènements.

1) On dit que les évènements sont 2 **à** 2 **indépendants** si:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants.}$$

2) On dit que les évènements sont **mutuellement indépendants** si:

$$\forall k \geqslant 2, \quad \forall (i_1, \ldots, i_k) \in [\![1,n]\!]^k, \quad P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}).$$

Remarques

- Des événements mutuellement indépendants sont aussi 2 à 2 indépendants.
  La réciproque est fausse pour $n \geqslant 3$.
  Contre-exemple: on lance deux dés parfaits. Soient les événements, A: “premier dé pair”, B: “second dé pair”, C: “la somme est paire”.
- ⚠ **Attention** ⚠ Deux événements peuvent apparaître intuitivement indépendants alors qu'ils ne le sont pas. Par conséquent, ou bien une hypothèse d'indépendance est clairement émise dans l'énoncé, ou bien il faut effectuer le calcul pour justifier l'indépendance.
- Si l'on souhaite calculer la probabilité d'une intersection :
  - si une hypothèse d'indépendance est connue, on utilise la formule ci-dessus
  - sinon on utilise la formule des probabilités composées.

Théorème

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'évènements mutuellements indépendants.

1) Toute sous-famille $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ est formée d'évènements mutuellements indépendants.
2) Si $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ alors $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille d'évènements mutuellements indépendants.
3)
   - Si C est la réunion ou l'intersection d'événements de $\{A_1, \ldots, A_p\}$ ou de leur contraire.
   - Si D est la réunion ou l'intersection d'événements de $\{A_{p+1}, \ldots, A_n\}$ ou de leur contraire.

   Alors C et D sont indépendants.