Chapitre
Variables aléatoires sur un univers fini

Dans tout ce chapitre les univers Ω introduits sont finis.

I Variables aléatoires

I.1 Définitions

Définition (Variable aléatoire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- On appelle **variable aléatoire** (abrégé v.a.) toute application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
  Lorsque $E \subset \mathbb{R}$ la v.a. est **une variable aléatoire réelle** (abrégé v.a.r.) (ce sera le cas le plus courant).
- Pour toute partie A de E, l'évènement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}$ est **noté**
  $$(X \in A) \quad \text{ou} \quad \{X \in A\}.$$
  Si $A = \{x\}$, l'évènement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in \{x\}\}$ est plutôt noté
  $$(X = x) \quad \text{ou} \quad \{X = x\}.$$
  Si $A =]-\infty, x]$, l'évènement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in]-\infty, x]\}$ est plutôt noté
  $$(X \leqslant x) \quad \text{ou} \quad \{X \leqslant x\}.$$
- $X(\Omega)$ est appelé l'**univers-image** de X.
- On utilise alors les notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$.

Exemples

1) On lance un dé normal deux fois de suite. On définit la v.a.r. X, la somme des deux résultats obtenus.
   Déterminer l'univers Ω et l'univers-image de X.
   Calculer la probabilité des événements $(X = 5)$, $(X \leqslant 5)$ et (X multiple de 5).

2) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire une poignée de p boules simultanément. On définit les deux variables aléatoires réelles :

   - X le plus grand numéro tiré
   - Y le plus petit numéro tiré.

   Déterminer l'univers de l'expérience et les univers-images de X et Y.

I.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition (Loi de probabilité)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une v.a.r. sur Ω.

- **Loi de probabilité**. On appelle **loi de** X ou **loi de probabilité de** X l'application

$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}$$

  P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

- La loi P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$, dans ce cas

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \qquad P(X \in A) = P_X(A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

- Si Y est une v.a.r. , on note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

Remarques

Une variable aléatoire se définit indépendamment de la probabilité sur Ω. En revanche, la loi de probabilité de X est déterminée à partir de la probabilité sur Ω.

✎ Méthode pratique ✎ (Déterminer la loi de X)

Déterminer la loi de X c'est déterminer:

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \qquad\qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad p_i = P(X = x_i).$$

Les évènements $(X = x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forment un SCE. En particulier, $p_i \geqslant 0$ pour tout i et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

On peut présenter les résultats dans un tableau:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Exemples On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On définit la v.a.r. X comme le nombre de piles obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice.

1) On reprend une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire une poignée de p boules simultanément. On définit les deux variables aléatoires réelles :

- X le plus grand numéro tiré
- Y le plus petit numéro tiré.

Déterminer les lois de X et Y.

2) On effectue désormais p tirages successifs avec remise.

-a- Déterminer l'univers de l'expérience et les univers-images de X et Y.

-b- Déterminer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de X.

-c- Déterminer $P(Y \geqslant k)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de Y.

✎ Méthode pratique ✎ ($P(X = k)$ à l'aide de $P(X \leqslant k)$ $P(X \geqslant k)$)

Soit X une v.a.r. telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$. Lorsqu'il est plus simple de calculer $P(X \leqslant k)$ ou $P(X \geqslant k)$ que $P(X = k)$, on utilise alors

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1) \qquad \text{ou} \qquad P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k + 1).$$

Remarques

Dans la pratique, quand on étudie une v.a. , on verra que souvent c'est $X(\Omega)$ qui nous intéresse et plus vraiment Ω.

I.3 Image d'une variable aléatoire

Définition (Image d'une v.a.r.)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une v.a.r. sur Ω.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou plus restrictivement $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$) une application.
Alors l'application composée $Y = f \circ X$, $\begin{array}{rccc} Y : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array}$ est une v.a.r. notée $Y = f(X)$.
La loi P_Y de Y est entièrement déterminée par f et la loi de X. Plus précisément,

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y = f(x)}} P(X = x).$$

Remarques

Soient X et Y sont deux v.a.r. sur (Ω, P). Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Exemple On reprend l'exemple précédent du lancer deux fois de suite d'une pièce équilibrée et la v.a.r. X désignant le nombre de piles obtenus.
On pose $f : x \mapsto |x - 1|$. On pose $Y = f(X)$. Déterminer la loi de Y.

I.4 Indépendance de v.a.

Définition (Indépendance de 2 v.a.)

Soient X et Y deux v.a.r. sur un espace probabilisé fini (Ω, P),

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}, \qquad Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}.$$

On dit que les variables aléatoires sont **indépendantes**, que l'on note $X \perp\!\!\!\perp Y$, si:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], \quad P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Théorème

Soient X et Y deux v.a.r. sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

1) X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2$, on a

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B)(= P(X \in A, Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

2) Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors pour toutes fonctions f et g définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors les v.a. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Définition (Indépendance mutuelle de n v.a.)

Soient $X_1, \dots, X_n$, n v.a. sur un espace probabilisé fini (Ω, P) $(n \in \mathbb{N}^*)$.

- On dit que les n variables aléatoires sont **mutuellement indépendantes** si:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n).$$

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega)$,...,A_n de $X_n(\Omega)$ les évènements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellements indépendants. En particulier:

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \cdots \times P(X_n \in A_n).$$

Remarques

1) Tout sous-ensemble d'un ensemble de v.a. mutuellement indépendantes est un ensemble de v.a. mutuellement indépendantes : c'est le lemme des coalitions.

2) Pour les v.a. : indépendance mutuelle $\Rightarrow$ indépendance 2 à 2.

II Lois finies usuelles

II.1 Loi uniforme

Principe : une variable aléatoire suit une loi uniforme lorsque toutes les valeurs de cette variable sont équiprobables.

Définition (Loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une v.a. sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments 2 à 2 distincts (souvent des réels mais pas forcément).
On dit que X suit une **loi uniforme** sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et on note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ (on rencontre aussi $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ si:

- $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$ (les évènements $(X = x_i)$ sont équiprobables).

Exemple

1) Tirage dans une urne où il y à n jetons numérotés de 1 à n: $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
2) Choix d'un nombre au hasard entre 1 et n: $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
3) On lance un dé bleu et un dé rouge à 6 faces. On définit les v.a.r. , R le résultat du dé rouge et B le résultat du dé bleu. B et R suivent une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$ et le couple (B, R) suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]^2$.

II.2 Loi de Bernoulli

Prinicipe : une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli modélise une situation d'expérience à deux issues (succès/échec, blanc/noir...). Une telle expérience est appelée épreuve de Bernoulli.

Définition (Loi de Bernoulli de paramètre p)

Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si:

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p = q$.

Exemple

1) Jeu de pile ou face où X vaut 0 si face avec proba $1 - p$ et 1 si pile avec proba p.
2) **Exemple fondamental** : pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité p: $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p)$. En effet:

$$P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A) = p \qquad\qquad P(\mathbb{1}_A = 0) = P(\overline{A}) = 1 - p.$$

Donc la loi de Bernoulli modélise toute expérience aléatoire dans laquelle un évènement A a une proba p de se produire et une proba $1 - p$ de ne pas se produire.

II.3 Loi binomiale

Prinicipe : une variable aléatoire suivant une loi binomiale représente le nombre de succès obtenus lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Définition (Loi binomiale de paramètres (n, p).)

Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètre $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si:

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$

Exemple

1) On effectue 15 tirages avec remise dans une urne contenant avec 10 boules blanches et 20 boules noires. On définit la v.a.r. X désignant le nombre de boules blanches tirées.

   Alors $X \sim$

2) Plus généralement: toute répétition n fois (de manière indépendante) d'une expérience de type Bernoulli à deux issues succès/échec.

Remarques

1) **Somme des probabilités vaut 1**. $\sum_{k=0}^{n} P(x=k) = (p+q)^n = 1$: OUF !
2) **Bernoulli = binômiale avec** $n = 1$. $X \sim \mathcal{B}(1,p)$ signifie $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Théorème (Somme de Bernoulli)

Soit $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé fini (Ω, P) suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors:

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p).$$

Réciproquement, si X est une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètre (n,p) alors

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

où les $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.r. mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p.

Exercice. Montrer que si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $n - X \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$

III Espérance

III.1 Définition

Définition (Espérance)

Soit X une *v.a.r.* sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

- **L'espérance** de X est le réel défini par : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)} = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.
- Si on pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)}.$$

Remarques

- L'espérance de X est une moyenne des valeurs de X. Chaque valeur $x \in X(\Omega)$ s'y trouve comptabilisée en proportion de sa probabilité d'occurence.
- En pratique ce sont les deux formules encadrés que nous utiliserons dans les exercices. La formule non encadrée sera plutôt utile dans les démonstrations de cours.

Exemples

1) Exemple du début de cours: lancer 2 fois d'une pièce équilibrée. Et X le nombre de piles obtenus. Déterminer l'espérance de X.
2) Lancer d'un dé et X le numéro obtenu lors du lancement d'un dé. Déterminer l'espérance de X.
3) **Résultats à connaître**:
   - v.a. certaine X i.e. X constante de valeur α, $P(X = \alpha) = 1$ et $P(X = x) = 0$ pour $x \neq \alpha$.

     Alors $\mathbb{E}(X) =$
   - $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$: $\mathbb{E}(X) =$
     .
   - $X \sim \mathcal{B}(p)$: $\mathbb{E}(X) =$
   - $X \sim \mathcal{B}(n, p)$: $\mathbb{E}(X) =$

Exercice. Retour sur l'exercice d'un tirage simultané de p boules dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à N. Déterminer l'espérance de X, le plus grand numéro tiré.

III.2 Propriétés de l'espérance

Théorème (de transfert)

Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

- L'espérance de $f(X)$ ne dépend que de la loi de X et est donnée par la formule

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

- Si on pose $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) P(X = x_i).$$

☞ **Explication** ☜ L'intérêt de cette formule réside dans le fait que pour calculer l'espérance de $f(X)$ on n'a pas besoin de déterminer la loi de $f(X)$ on utilise celle de X.

Exercice. Soit X une var, $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer l'espérance de X^2, de e^X.

Théorème (Propriétés calculatoires)

Soit X, Y deux v.a.r. définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2)$.

1) **Linéarité**. $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$ $\mathbb{E}(\lambda X + \mu) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu$.
2) **Positivité**. Si $X \geqslant 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
   De plus : $\mathbb{E}(X) = 0$ si et seulement si $P(X = 0) = 1$.
3) **Croissance**. Si $X \leqslant Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Exemple Soit X une variable aléatoire réelle. Que vaut l'espérance de $X - \mathbb{E}(X)$?

Corollaire (Espérance d'une somme quelconque)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. sur un espace probabilisé fini (Ω, P). Alors:

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Remarques (Application : espérance d'une v.a.r. suivant la loi binoimale)

Supposons $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $X = X_1 + \cdots + X_n$ où $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Exercice.

1) On lance 5 dés, on note S la somme des résultats obtenus. Calculer l'espérance de S.

2) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On les extrait successivement sans remise. On dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage lorsque la bouel tirée porte le numéro i. Déterminer le nombre moyen de recontres.

Théorème (Inégalité de Markov)

Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P), à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors:

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a}\mathbb{E}(X).$$

IV Variance-Ecart-Type

Définition (Moments d'ordre r)

Soient X une *v.a.r.* sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et $r \in \mathbb{N}$.
Le **moment d'ordre** r de la variable X est

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x).$$

Si on pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r P(X = x_i).$$

Définition (Variance-Ecart-type)

Soit X une *v.a.r.* sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

- On définit la **variance** de X par: $\quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.
- On définit l'**écart-type** de X par: $\quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

☞ **Explication** ☜ Les valeurs de X sont-elles plutôt proches ou plutôt éloignée de l'espérance (la moyenne) de X. Pour répondre exactement à cette question, on pourrait étudier la moyenne des écarts à la moyenne i.e. l'espérance de $|X - \mathbb{E}(X)|$: $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|$. Cette mesure est un **indicateur de dispersion**. Cela dit, le statisticien préfère utiliser l'indicateur de dispersion consistant à prendre la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
Avantages : pas de valeur absolue, formules et propriétés calculatoires pratiques.
Inconvénients : non homogène à la grandeur initiale. D'où le passage à la racine et l'ecart-type $\sigma(X)$ plus proche de $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|$.

✎ **En pratique** ✎ On utilise rarement la formule de la définition pour calculer la variance, on lui préfère la formule suivante.

Théorème (Formule de Huygens ou Konig-Huygens)

Soit X une *v.a.r.* sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = m_2(X) - m_1(X)^2.$$

Exemples

1) Exemple du début de cours: lancer 2 fois d'une pièce équilibrée. Et X le nombre de piles obtenus. Déterminer la variance de X.

2) **Résultats à connaître**:

- v.a. certaine X i.e. X constante de valeur α, $P(X=\alpha)=1$ et $P(X=x)=0$ pour $x\neq\alpha$. Alors $\mathbb{V}(X)=0$. D'ailleurs une variance nulle caractérise une v.a. certaine.
- $X\sim\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$: $\mathbb{V}(X)=$
- $X\sim\mathcal{B}(p)$: $\mathbb{V}(X)=$
- $X\sim\mathcal{B}(n,p)$: $\mathbb{V}(X)=$

✎ **En pratique** ✎ Il est parfois utile et plus commode de calculer $\mathbb{E}(X(X+1))$ pour calculer $\mathbb{E}(X^2)$. La linéarite de l'espérance donne alors : $\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(X(X+1))-\mathbb{E}(X)$.

Théorème (Propriétés de la variance)

Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé fini (Ω,P).

1) **Positivité.** $V(X)\geqslant 0$.
2) **Variance nulle.** $V(X)=0$ si et seulement si X est constante.
3) **Pas linéaire mais...** $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$.

Remarques (Sur $\mathbb{V}(X+Y)$...)

$V(X+Y)$ n'est pas toujours égal à $V(X)+V(Y)$...C'est le cas si X et Y sont indépendantes. On le verra fin de chapitre dans la rubrique covariance.

Exercice.

1) Déterminer l'espérance et la variance d'une v.a.r. suivant une loi uniforme sur $\llbracket a,b\rrbracket$, en se ramenant à une loi uniforme sur $\llbracket 1,n\rrbracket$.
2) Déterminer l'espérance et la variance d'une v.a.r. X d'univers image $\{-1,1\}$, tel que $P(X=1)=\dfrac{1}{4}$, en se ramenant à une loi de Bernoulli.
3) Soient $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}^*$ et X une v.a.r. d'uivers image $\llbracket 1,n\rrbracket$ telle que :
$$\forall k\in X(\Omega),\quad P(X=k)=\alpha k.$$
Déterminer α, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Définition (Variable centrée réduite)

Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé (Ω,P).

- X est dite **centrée** si $\mathbb{E}(X)=0$.
- X est dite **réduite** si $\mathbb{V}(X)=1$.
- X est dite **centrée-réduite** si $\mathbb{E}(X)=0$ et $\mathbb{V}(X)=1$.

Exemple Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé (Ω, P) telle que $V(X) \neq 0$. Montrer que $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P). Alors:

$$\forall a > 0, \quad P((|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a)) \leqslant \frac{1}{a^2}\mathbb{V}(X).$$

Exemple On lance une pièce de monnaie n fois, Pile est obtenu avec probabilité $p \in [0, 1]$.
Quel est le nombre minimal de lancers pour affirmer que la fréquence d'apparition de Pile soit une approximation de p à 0.01 avec une probabilité inférieure ou égale 0.5 ?

V Couple de v.a.

V.1 Loi conjointe

Définition (Couple de v.a.)

Soient X et Y deux v.a.r. sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

- L'application
$$(X, Y) : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$
est une variable aléatoire appelée **couple de variables aléatoires** sur Ω.

- On appelle loi conjointe du couple de v.a. (X, Y) ou plus simplement loi de (X, Y), la loi de la variable aléatoire (X, Y).
Cette loi est entièrement déterminée par les valeurs
$$P(X = x, Y = y) \quad \text{où} \quad (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$
$P(X = x, Y = y)$ est aussi noté $\quad P(X = x \text{ et } Y = y) \quad$ ou $\quad P((X = x) \cap (Y = y))$.

- Les lois de X et Y sont appelées **les lois marginales** du couple (X, Y).

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Déterminer la loi du couple (X, Y))**

Déterminer la loi conjointe de (X, Y) c'est déterminer:

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}, \qquad Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\} \qquad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], \quad p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j).$

Les évènements $(X = x_i, Y = y_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ forment un SCE.

En particulier, $\quad p_{ij} \geqslant 0 \quad$ pour tout i, j et $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$

On peut présenter les résultats dans un tableau:

$X \quad Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
$\vdots$				$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

Exemple Une urne contient une boule blanche, deux boules rouges. On extrait successivement les 3 boules de l'urne.

On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y le rang d'apparition de la deuxième boule rouge. Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice. On lance deux dés à 6 faces. On considère X (resp. Y) le plus petit (resp. grand) nombre obtenu. Déterminer la loi du couple (X, Y).

✎ Méthode pratique ✎ (Déterminer les lois marginales à partir de la loi du couple)

$$\forall x \in X(\Omega), \qquad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \quad \text{avec le SCE } (Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$$

$$\forall y \in X(\Omega), \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \quad \text{avec le SCE } (X = x)_{x \in X(\Omega)}.$$

Ou, avec les notations ci-dessus,

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}, \qquad Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}.$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) \qquad \text{(avec le SCE } (\{Y = y_j\})_{1 \leqslant j \leqslant m})$$

$$\forall j \in [\![1, m]\!], \quad P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) \qquad \text{(avec le SCE } (\{X = x_i\})_{1 \leqslant i \leqslant n})$$

Lorsque la loi conjointe est représentée sous forme d'un tableau, on retrouve les lois marginales en sommant sur chaque ligne et chaque colonne.

Exemple Retour sur l'exemple de l'urne contenant une boule blanche, deux boules rouges. On extrait successivement les 3 boules de l'urne.
On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y le rang d'apparition de la deuxième boule rouge.
Déterminer les lois marginales.

Remarques (Loi conjointe donne lois marginales mais pas le contraire)

La loi conjointe permet de déterminer les lois marginales.
La réciproque est fausse, cependant pour des v.a.r. **indépendantes**, la connaissance des lois marginales permet de connaître la loi conjointe car dans ce cas

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)(Y = y_j).$$

Exemple. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) dans les deux cas suivants.

X \ Y	1	2
1	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	0

X \ Y	1	2
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

✎ Méthode pratique ✎ (Loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes)

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes sur (Ω, P). La loi de $X+Y$ est donnée par :

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=z) = \sum_{\substack{x+y=z \\ (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}} P(X=x)P(Y=y).$$

Supposons $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Alors en posant $S = X+Y$, $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et:

$$\forall n \in S(\Omega), \quad P(X+y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) \quad \text{on utilise le SCE } (X=k)$$

$$\forall n \in S(\Omega), \quad P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k).$$

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ où $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in [0,1]$. Montrer que $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

V.2 Lois conditionnelles

Définition (Lois conditionnelles)

Soient X et Y deux v.a.r. sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

- Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y) > 0$. La **loi de X sachant** $(Y=y)$ est est la loi de X dans l'espace probabilité $(\Omega, P_{(Y=y)})$. Elle est donnée pour tout $x \in X(\Omega)$ par

$$P_{(Y=y)}(X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

- Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X=x) > 0$. La **loi de Y sachant** $(X=x)$ est est la loi de Y dans l'espace probabilité $(\Omega, P_{(X=x)})$. Elle est donnée pour tout $y \in Y(\Omega)$ par

$$P_{(X=x)}(Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}.$$

✎ En pratique ✎ On obtient les lois conditionnelles, en divisant les probabilités du tableau de la loi conjointe par les lois marginales.

Exemple Retour sur l'exemple de l'urne contenant une boule blanche, deux boules rouges. On extrait successivement les 3 boules de l'urne.
On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y le rang d'apparition de la deuxième boule rouge.
Déterminer les lois conditionnelles.

Exercice. On lance deux dés à 6 faces. On considère X (resp. Y) le plus petit (resp. grand) nombre obtenu. Déterminer les différentes lois conditionnelles.

Méthode pratique **(Déterminer lois lois marginales à l'aide des lois conditionnelles)**

On suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $P(X=x) \neq 0$ et $P(Y=y)$.

$$\forall x \in X(\Omega), \qquad P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{(Y=y)}(X=x)P(Y=y) \quad \text{avec le SCE } (Y=y)_{y\in Y(\Omega)}$$

$$\forall y \in X(\Omega), \qquad P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P_{(X=x)}(Y=y)P(X=x) \quad \text{avec le SCE } (X=x)_{x\in X(\Omega)}.$$

Exercice. Un grand classique Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in]0,1[^2$ et X et Y deux variables aléatoires X et Y telles que $X \sim \mathcal{B}(n, \alpha)$ et $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ la loi de de Y sachant $(X = k)$ suit une loi $\mathcal{B}(k, \beta)$.
Déterminer la loi du couple (X, Y). Puis la loi de Y (on obtient une loi binomiale).

V.3 Cas de n-uplets de variables aléatoires

On peut généraliser aux n-uplets de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$:

- loi conjointe de $(X_1, \ldots, X_n)$, déterminée entièrement par les valeurs de

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \quad \text{où} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega).$$

- loi marginale obtenue à partir de la loi conjointe avec le SCE adapté

VI Covariance

Théorème-Définition (Covariance)

Soient X et Y deux *v.a.r.* sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

- On appelle **covariance** de X et Y ou du couple (X, Y) le réel

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

  En particulier, $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.

- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- X et Y sont dites décorrélées si leur covariance est nulle.

Théorème (Espérance d'un produit)

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

- $\mathbb{E}(X \times Y) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$.
- **Si X et Y sont indépendantes** alors: $\quad \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

⚠ **Attention** ⚠ La relation $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ est fausse en général et elle n'implique même pas que X et Y sont indépendantes.

Théorème (Propriétés de la covariance)

La covariance est bilinéaire, symétrique et positive.
Soient X, Y, Z des *v.a.r.* sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1) **Positivité**. $\mathrm{Cov}(X, X) \geqslant 0$.

2) **Symétrie**. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

3) **Bilinéarité**.
$\mathrm{Cov}(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda \mathrm{Cov}(X, Z) + \mu \mathrm{Cov}(Y, Z) \qquad \mathrm{Cov}(Z, \lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{Cov}(Z, X) + \mu \mathrm{Cov}(Z, Y)$.

NB : la covariance n'est pas définie, ce n'est donc pas un produit scalaire. On peut avoir $\mathrm{Cov}(X, X) = 0$ sans avoir X nul.

Théorème (Variance d'une somme)

- **Cas de deux variables aléatoires**. Soient X et Y deuxv.a.r. définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P). Alors
$$V(X + Y) = V(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y).$$
En particulier, si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

- **Cas de n variables aléatoires.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des var définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P), $\boxed{\text{deux à deux indépendantes}}$ alors
$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Exercice. Une urne contient des boules blanches, noires, rouges en proportion p_1, p_2, p_3.
On extrait n boules de l'urne avec remise. On note X, Y, Z le nombre de boules blanches, noires et rouges obtenues.

1) Quelle est la loi de X, la loi de Y et la loi Z ?

2) Que vaut $X + Y + Z$? En déduire la loi de $S = X + Y$?

3) Déterminer alors l'espérance de XY puis la covariance du couple (X, Y).