Chapitre
Fonctions de deux variables

$\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne euclidienne canonique $\|\cdot\|$:

$$\|u\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \text{si } u=(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

I Fonctions numérique de deux variables

I.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Définition (Boules de $\mathbb{R}^2$)

Soient $a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$.

- La **boule ouverte** de centre a et de rayon r est $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^2 \ / \ \|x-a\|<r\}$.
- La **boule fermée** de centre a et de rayon r est $\overline{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^2 \ / \ \|x-a\|\leqslant r\}$.
- La **sphère** de centre a et de rayon r est $S(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^2 \ / \ \|x-a\|=r\}$.

Définition (Ouverts de $\mathbb{R}^2$)

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si :

$$\forall a\in U,\ \exists r>0 \ / \ B(a,r)\subset U.$$

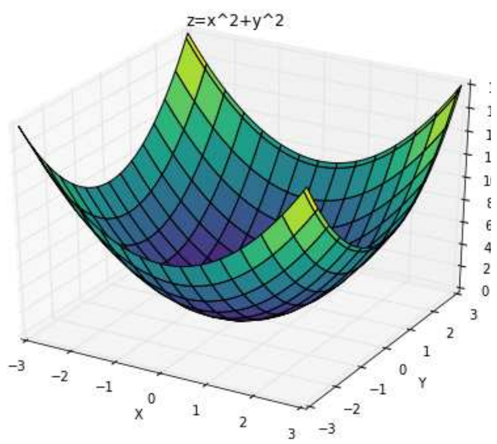
Exemples

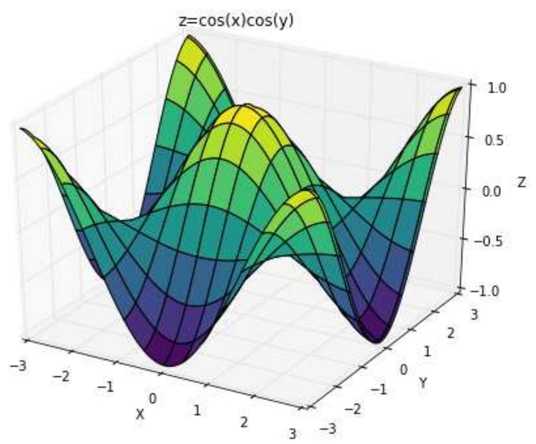
1) $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2) Une boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3) Le produit d'intervalles ouverts $]a,b[\times]c,d[$ est ouvert.

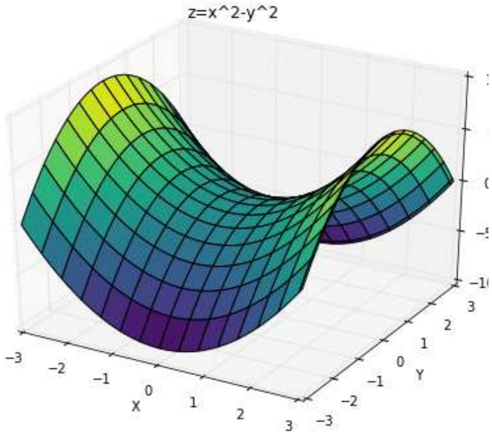
I.2 Représentation graphique

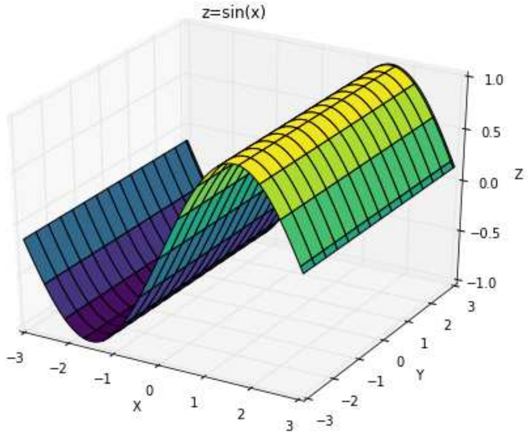
Lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le graphe de $f:U\to\mathbb{R}$ est :

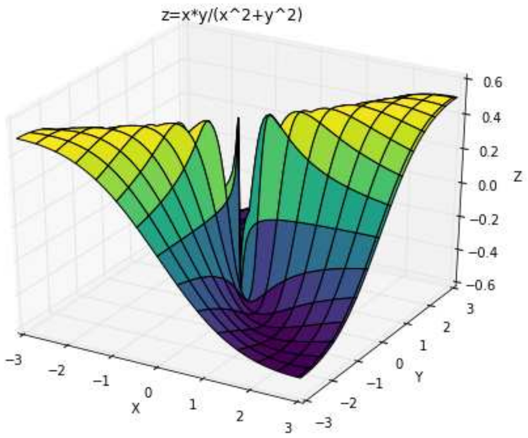
$$G=\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3 \ / \ (x,y)\in U\}.$$











I.3 Limites et continuité

Définition (Limites - Continuité)

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$ et $l \in \mathbb{R}$.

- f admet l comme limite en (x_0, y_0) noté $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ ou $f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} l$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall (x,y) \in A,\ \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| \leqslant \varepsilon.$$

- f est **continue en** (x_0, y_0) si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

- f **continue sur** A si f est continue en tout point de A, on note $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$ leur ensemble.

Remarques

1) Dire que $(x,y) \to (x_0,y_0)$ signifie que (x,y) s'approche de (x_0,y_0) indépendamment du chemin i.e. $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \to 0$.

   En coordonnées polaires, si on pose $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$ où $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[$, alors

$$(x,y) \to (x_0,y_0) \iff r = \|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0.$$

2) Les propriétés suivantes, vues pour les fonctions d'une variable :

   - opérations sur les limites (somme, produit, inverse)
   - unicité de la limite
   - passage à la limite d'inégalités, théorème des gendarmes
   - existence de limite finie $\Rightarrow$ bornée au voisinage du point
   - opérations sur les fonctions continues (somme, produit, inverse, quotient, composition)

   sont conservées pour les fonctions de deux variables.

Exemples

1) Les fonctions $f_1 : (x,y) \mapsto x$ et $f_2 : (x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
2) Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3) La fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$
4) Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.
5) Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction f définie par $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

II Calcul différentiel

L'objectif de cette partie est d'étendre la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables.

II.1 Dérivées partielles

Définition (Dérivée directionnelle)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^2$.
On dit que f est **dérivable en** a **dans la direction** v, si la limite $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ existe et est finie c'est-à-dire $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a+tv) \in \mathbb{R}$ est dérivable en 0.
On pose alors

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$

☞ **Explication** ☜ Dans cette limite, on s'approche de a dans la direction h. Le fait que U soit ouvert implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [-\delta,\delta]$, $a+tv \in U$, ce qui permet de définir $f(a+tv)$ pour t au voisinage de 0.

Définition (Dérivées partielles)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in U$.

- f possède une **dérivée partielle par rapport à sa première variable** en (x_0, y_0) si f est dérivable en (x_0, y_0) dans la direction $\overrightarrow{i} = (1, 0)$.
  Cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

- f possède une **dérivée partielle par rapport à sa seconde variable** en (x_0, y_0) si f est dérivable en (x_0, y_0) dans la direction $\overrightarrow{j} = (0, 1)$.
  Cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

.

☞ **Explication** ☜ Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ revient à dériver f par rapport à sa première variable en considérant que l'autre variable est "gelée", fixée. Remarque similaire, pour la dérivation par rapport à y.

Remarques (Notation)

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est parfois notée $\partial_1 f$ ou $D_1 f$.
Pour une fonction notée $(u, v) :\mapsto$ ..., cette dérivée peut être notée $\dfrac{\partial f}{\partial u}$.

Exemple Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sin(x^2 y)$. Calculer les dérivées partielles de f.

⚠ **Attention** ⚠ Une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans être continue en ce point.

Contre-exemple : $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$.

Pire, elle peut admettre des dérivées dans toutes les directions sans être continue.

Contre-exemple : $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ f(x, 0) = x \end{cases}$.

Définition (Gradient)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.
Si f possède des dérivées partielles en (x_0, y_0), on définit le **gradient** de f en (x_0, y_0) par

$$\nabla f(x_0, y_0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

II.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$.
f est dite **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur U si f possède des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur U qui sont continues sur U.
On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ leur ensemble.

Remarques

La combinaison linéaire, le produit, l'inverse, le quotient (quand le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
La composée par une fonction de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (lorsque la composition est licite).

Exemples

1) Les fonctions $f_1 : (x, y) \mapsto x$ et $f_2 : (x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

3) La fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4) Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$. Étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de cette fonction.

Théorème (Développement limité d'ordre 1)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a = (x_0, y_0) \in U$. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $a = (x_0, y_0)$ c'est-à-dire :

$$\boxed{f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|(h, k)\|)}.$$

Que l'on peut réécrire à l'aide du gradient :

$$f(a + u) = f(a) + (\nabla f(a)|u) + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(\|u\|)\,.$$

De plus f possède une dérivée selon tout vecteur $h = (h_1, h_2)$ égale à:

$$D_h f(a) = h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \operatorname{Grad} f(a) \cdot h.$$

Preuve - Admis (conformément au programme). □

Remarques

1) Le DL met en évidence l'approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ par $h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
   Le plan d'équation
$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$
   est le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$.

2) **Lien avec la physique.** On reconnait la formule vue en physique:
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \text{(à ne pas écrire en maths)},$$
   où df, dx, dy sont des infiniment petits qui représentent des petites variations. Cette formule physicienne, qui a une explication mathématique, exprime la variation de f en fonction de la variation de x et y via les dérivées partielles de f

On a vu que l'existence de dérivées partielles n'assure pas la continuité. Par contre:

Théorème ($\mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors f est continue sur U.

Théorème ($\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ dérivable selon le vecteur v)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$ alors f admet des dérivées en a selon tous les vecteurs.
Avec, pour tout $v \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$,
$$D_v f(a) = (\nabla f(a) \,|\, v)\,.$$
Autrement dit, si $v = (h, k)$,
$$D_{(h,k)} f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

II.3 Composition de fonctions

Théorème (Composition $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - Règle de la chaîne)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soient $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que $x(I) \times y(I) \subset U$.

Alors la fonction $F : t \in I \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\forall t \in I, \quad \boxed{F'(t) = \frac{\mathrm{d}f(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))}.$$

Exemples On pose $F(t) = f(\cos t, \sin t)$ où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F'(t) =$$

Corollaire (Règle de la chaîne à l'aide du gradient)

Sous les hypothèses du théorème précédent et en posant $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.
Alors $F = f \circ \gamma$ et la règle de la chaîne se réécrit :

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = (\nabla f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)) = D_{\gamma'(t)} f(\gamma(t)).$$

Remarques (Interprétation géométrique du gradient)

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = f(x, y)$.
On appelle courbe de niveau de f de niveau λ l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x, y) = \lambda\}$.
Supposons que C_λ puisse être paramétrée par γ c'est-à-dire $C_\lambda = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) \ / \ t \in I\}$ donc $f(\gamma(t)) = \lambda$ pour tout $t \in I$.
En dérivant, pour tout $t \in I$:

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t).$$

Géométriquement que $\gamma'(t)$ (lorsqu'il est non nul) dirige la tangente au point de paramètre t de C_λ.
Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau, dirigé dans le sens des pentes croissantes. Plus la pente est forte, plus le gradient est grand en norme.

Théorème (Composition $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

Soient U, Ω des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Soient $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telles que $\varphi(\Omega) \times \psi(\Omega) \subset U$.
Alors la fonction $g : \Omega \to R$ définie par

$$g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω avec pour tout $(u,v) \in \Omega$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \end{cases}.$$

☞ **Explication** ☜ Par souci de lisibilité les variables de f ont été notée x et y tandis que celles de g ont été notées u et v. Le physicien notera ces formules

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}.$$

L'inconvénient de ces formules est que l'on ne sait plus qui dépend de quoi.

Exemples.

1) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $F(u,v) = f(u^3 + v, uv - v^3)$.
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

2) Passage de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.
Soit $R > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(B(0,R))$. Pour tout $(r,\theta) \in]-R,R[\times\mathbb{R}$, on pose $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[\times\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles.

II.4 Application aux équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont la généralisation des équations différentielles au cas de plusieurs variables. Elles proviennent la plupart du temps de la modélisation de phénomènes concrets: physiques, mécaniques, biologiques...Citons deux EDP classiques.

- Équation des cordes vibrantes: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ où $y(t,x)$ la fonction inconnue représente la position verticale à l'abscisse x et à l'instant t d'une corde vibrante mesurée par rapport à sa position au au repos.
- Équation de la chaleur: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ où $T(t,x)$ la fonction inconnue représente la température à la position x et à l'instant t dans un milieu dans lequel la chaleur se propage par conduction .

Exemples.

1) Trouver les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^3 + y \quad (E)$$

2) Trouver les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + xy \quad (E)$$

en effectuant le changement de variables $x = u + v$,$y = u - v$.

II.5 Extrema locaux

Définition (Extremum local)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

- f admet un **maximum (resp. minimum) local** en a si f est majorée (resp. minorée) par $f(a)$ au voisinage de a i.e. s'il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a tel que

$$\forall u \in V, \quad f(u) \leqslant f(a) \quad (\text{ resp. } f(u) \geqslant f(a)).$$

- Un maximum ou un minimum local est appelé **extremum local**.

Théorème (Extremum $\Rightarrow$ Critique)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Si f présente un extremum local en $a \in U$ alors

$$\nabla f(a) = (0,0) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

Les points a vérifiant $\nabla f(a) = (0,0)$ sont appelés **points critiques**.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fausse, un point critique n'est pas nécessairement un extremum local.

Exemples

1) Soit $f(x,y) = x^3$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

2) Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

✎ Méthode pratique ✎ (Pour déterminer des extremas locaux)

- on cherche les points critiques (x_0, y_0)
- puis on étudie le signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ au voisinage de (x_0,y_0), ou plutôt le signe de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$ (le signe est plus facile à étudier dans ce cas)
  - s'il est toujours positif, (x_0,y_0) est minimum local
  - s'il est toujours négatif, (x_0,y_0) est maximum local
  - sinon, c'est un point selle.

Exercice.

1) Étudier les extremas de $f(x,y) = x^2 - 2x + xy + y^2$.

2) Étudier les extremas de $f(x,y) = x^2 - y^2$.